Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 512.25/26+519.3:330.115

МАТЕМАТИКА

Ю. Ю. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

ОЦЕНКА ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ГОМОРИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 4 I 1970)

1. Многие алгоритмы целочисленного линейного программирования основаны на идее отсечения (см. ([1,2])). Эти алгоритмы ведут себя весьма «нерегулярно». Задачи значительных размеров могут решаться достаточно быстро, и в то же время некоторые небольшие задачи не решаются за десятки тысяч итераций. До настоящего времени все опубликованные результаты по эффективности метода отсечения основываются на машинном эксперименте (обзор результатов см. ([1]) и ([2]), гл. 9).

В данной работе исследуется один из наиболее известных алгоритмов метода отсечения (полностью целочисленный алгоритм Гомори ([3])). Для алгоритма Гомори построен пример «плохой» задачи (задача T_0), т. е. задачи с числом итераций, быстро растущих с ростом коэффициентов и увеличением числа переменных. Это дало возможность получить нетривиальную нижнюю оценку для максимального числа итераций (теорема 2). Кроме того, оказалось (теорема 3), что при решении задачи T_0 в симплексных таблицах получаются большие числа.

2. Терминологию и обозначения, относящиеся к полностью целочисленному алгоритму Гомори, заимствуем из книги ([2]) (в которой он назван третьим алгоритмом Гомори). Вместо третьего алгоритма Гомори будем исследовать некоторый алгоритм (G_3-алгоритм), во всем совпадающий с третьим алгоритмом Гомори, кроме, быть может, правила выбора строки k (см. ([2]), стр. 174, внизу), по которой строится целочисленное правильное отсечение. В G_3-алгоритме k на p-й итерации также выбирается из множества $\{i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ x_{i0}^{p-1} < 0\}$, но выбирается по некоторому G_3-правилу. Таким образом, третий алгоритм Гомори также является G_3-алгоритмом. Все последующие рассуждения относятся к произвольному G_3-алгоритму (и, в частности, к третьему алгоритму Гомори).

3. Рассматривается задача целочисленного линейного программирования, линейные условия которой записаны в виде целочисленной и l-нормальной симплексной таблицы T_0

$$x_0 = x_{00}^0 + \sum_{j \in N_0} x_{0j}^0 (-x_j) \to \max, \tag{1}$$

$$x_i = x_{i0}^0 + \sum_{j \in N_0} x_{ij}^0 (-x_j), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$x_j \text{ целое}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь N_0 — множество индексов небазисных переменных, соответствующее симплексной таблице T_0. $N_0 \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Задачу (1)—(4) в дальнейшем называем задачей T_0.

4. Через $r(T_0)$ обозначим число небазисных переменных, соответствующих таблице T_0 (т. е. число элементов множества N_0). Через $q(T_0)$ обозначим максимум модуля элементов таблицы T_0

$$q(T_0) = \max\{|x_{ij}^0| \mid i = 0, 1, \ldots, n;\ j \in N_0 \cup \{0\}\}. \tag{5}$$

Через $I(T_0)$ обозначим число итераций G_3-алгоритма, соответствующее начальной таблице T_0. Через $K(r, q)$ обозначим множество задач целочисленного линейного программирования, заданных в виде целочисленных и l-нормальных симплексных таблиц T_0, для которых $r(T_0) = r$ и $q(T_0) = q$. Далее, пусть

$$I(r, q) = \max \{I(T_0) \mid T_0 \in K(r, q)\}. \tag{6}$$

5. Теорема 1. *Пусть $q \geqslant 2$ и $r \geqslant 3$. Тогда*

$$I(r, q) = \infty. \tag{7}$$

Доказательство основано на построении задачи T_0^*, для которой G_3-алгоритм дает бесконечное число итераций. Эта задача выписана ниже (идея построения T_0^* и доказательства (7) взяты из ([4])).

Задача.

$$x_0 = 0 + 1(-x_{r+1}),$$

$$x_1 = \begin{cases} -1 - q(-x_4) + 1(-x_5) + 1(-x_6) & \text{при } r = 3, \\ -1 - q(-x_{r+1}) + 1(-x_{r+2}) & \text{при } r \geqslant 4, \end{cases}$$

$$x_i = 0 - q(-x_{r+i}) + 1(-x_{r+i+1}),\ 2 \leqslant i \leqslant r-3,$$

$$x_{r-2} = 0 - q(-x_{2r-2}) + 1(-x_{2r-1}) + 1(-x_{2r}),$$

$$x_{r-1} = 0 + 1(-x_{r+1}) - q(-x_{2r-1}) + (q-1)(-x_{2r}),$$

$$x_r = 0 + \Big(\sum_{j=r+1}^{2r+1} (q-1)(-x_j)\Big) - q(-x_{2r}),$$

$$x_i = 0 + (-1)(-x_i),\ i = r+1, \ldots, 2r,$$

$$0 \leqslant x_i \text{ целое}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2r.$$

Для большей ясности см. симплексную таблицу T_0, соответствующую задаче T_0^* при $r = 4$.

	1	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$
x_0	0	1	0	0	0
x_1	-1	$-q$	1	0	0
x_2	0	0	$-q$	1	1
x_3	0	1	0	$-q$	$q-1$
x_4	0	$q-1$	$q-1$	$q-1$	$-q$
x_5	0	-1	0	0	0
x_6	0	0	-1	0	0
x_7	0	0	0	-1	0
x_8	0	0	0	0	-1

Нетрудно видеть (на основе тех же соображений, что и в ([4])), что задача T_0^* неразрешима. Между тем, наибольший интерес для исследования представляют задачи, имеющие решение (именно для таких задач и будет конечным третий алгоритм Гомори). Обозначим через $K'(r+1, q)$ множество разрешимых задач целочисленного линейного программирования, заданных в виде симплексных таблиц $T_0 \in K(r+1, q)$. Далее, пусть

$$I'(r+1, q) = \max\{I(T_0) \mid T_0 \in K'(r+1, q)\}. \tag{8}$$

Теорема 2 (основная). *Пусть $q \geqslant 2$ и $r \geqslant 3$. Тогда*

$$I'(r+1, q) \geqslant [q^{r-2} + (r-2)]/r+1. \tag{9}$$

6. Доказательство теоремы 2 основано на построении выписанной ниже разрешимой задачи $T_0 \in K'(r+1, q)$, для которой удается показать, что

$$I(T_0) \geqslant [q^{r-2} + (r-2)] / r+1. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$I'(r+1, q) \geqslant I(T_0), \tag{11}$$

так что из (10) и (11) сразу следует (9), что и доказывает теорему 2.

7. Задача T_0 имеет следующий вид:

Задача T_0.

$$x_0 = 0 + 1(-x_{r+1}) + q(-x_{2r+1}),$$

$$x_1 = \begin{cases} -1 - q(-x_4) + 1(-x_5) + 1(-x_6) - 1(-x_7) & \text{при } r = 3, \\ -1 - q(-x_{r+1}) + 1(-x_{r+2}) - 1(-x_{2r+1}) & \text{при } r \geqslant 4, \end{cases}$$

$$x_i = 0 - q(-x_{r-i}) + 1(-x_{r+i+1}),\ 2 \leqslant i \leqslant r-3,$$

$$x_{r-2} = 0 - q(-x_{2r-2}) + 1(-x_{2r-1}) + 1(-x_{2r}),$$

$$x_{r-1} = 0 + 1(-x_{r+1}) - q(-x_{2r-1}) + (q-1)(-x_{2r}),$$

$$x_r = 0 + \Big(\sum_{j=r+1}^{2r-1} (q-1)(-x_j)\Big) - q(-x_{2r}),$$

$$x_i = 0 + (-1)(-x_i),\ i = r+1, \dots, 2r+1,$$

$$0 \leqslant x_i \text{ целое},\quad i = 1, \dots, 2r+1.$$

Иначе говоря, таблица T_0 получена из таблицы T_0^* приписыванием строки x_{2r+1} и столбца x_{2r+1}. Для большей ясности дальше выписана симплексная таблица T_0, соответствующая $r = 4$.

	1	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	$-x_8$	$-x_9$
x_0	0	1	0	0	0	q
x_1	-1	$-q$	1	0	0	-1
x_2	0	0	$-q$	1	1	0
x_3	0	1	0	$-q$	$q-1$	0
x_4	0	$q-1$	$q-1$	$q-1$	$-q$	0
x_5	0	-1	0	0	0	0
x_6	0	0	-1	0	0	0
x_7	0	0	0	-1	0	0
x_8	0	0	0	0	-1	0
x_9	0	0	0	0	0	-1

Через $X' = (x_1', \dots, x'_{2r+1})$ обозначаем искомый l-оптимальный план задачи T_0. Доказательство формулы (10) проводится в несколько этапов.

Лемма 1. $x'_{2r+1} \geqslant 1$.

Лемма 2. $(x_1', \dots, x_{2r}', x_{2r+1}') = (0, \dots, 0, 1)$.

Следуя ([2]), обозначим через $T_0, T_1, \dots, T_k, \dots$ симплексные таблицы, последовательно получающиеся при применении к задаче T_0 G_3-алгоритма. Таблице $T_k = \|x_{ij}^k\|_{i=0,1,\dots,2r+1;\, j \in N_k'}$ соответствует множество N_k индексов небазисных переменных. Здесь $N_k' = N_k \cup \{0\}$. Если G_3-алгоритм решает задачу T_0 за конечное число итераций, то обозначим через δ номер последней итерации. На k-й итерации происходит переход от таблицы T_k к таблице T_{k+1}.

Лемма 3. x_{2r+1} *входит в базис лишь на последней* (δ-*й*) *итерации, т. е.*

$$(2r+1) \in N_k,\ k = 0, 1, \ldots, \delta; \quad 2r+1 \notin N_{\delta+1}.$$

Лемма 4. *Если* $t \leqslant \delta$, *то*

$$\sum_{i=1}^{r} x_{i0}^{t} = -1; \quad x_{ij}^{t} = x_{ij}^{0},\ i = 0, 1, \ldots, 2r+1,\ j \in N_t.$$

Лемма 5. *Если* $t \leqslant \delta$, *то*

$$-(r-1)(q-1) - 1 \leqslant x_{i0}^{t} \leqslant q - 1, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Лемма 6. *Если* $t \leqslant \delta$, *то*

$$0 = x_{i0}^{0} \leqslant x_{i0}^{1} \leqslant \ldots \leqslant x_{i0}^{t}, \quad i = r+1, \ldots, 2r.$$

Лемма 7. *Если* $t \leqslant \delta$ *и* $\Delta_i^t = x_{i0}^t - x_{i0}^0$, $i = 1, \ldots, r$, *то*

$$\Delta_1^t = \begin{cases} qx_{4,0}^{t} - x_{5,0}^{t} - x_{6,0}^{t} & \text{при } r = 3, \\ qx_{r+1,0}^{t} - x_{r+2,0}^{t} & \text{при } r \geqslant 4, \end{cases}$$

$$\Delta_i^t = qx_{r+i,0}^{t} - x_{r+i+1,0}^{t}, \quad 2 \leqslant i \leqslant r-3,$$

$$\Delta_{r-2}^{t} = qx_{2r-2,0}^{t} - x_{2r-1,0}^{t} - x_{2r,0}^{t}.$$

Лемма 8. *Если* $t \leqslant \delta$, *то*

$$\sum_{i=1}^{r} x_{r+i,0}^{t} = \frac{1}{(q-1)}\Big(x_{r+1,0}^{t}(q^{r-1}-1) - \sum_{i=1}^{r-2} \Delta_i^t (q^{r-i-1}-1)\Big).$$

Лемма 9. *Если*: 1) $t \leqslant \delta$, 2) $x_{10}^t \leqslant -1$, 3) $t \geqslant 1$, то

$$\sum_{i=1}^{r} x_{r+i,0}^{t} \geqslant q^{r-2} + (r-2).$$

Лемма 10. *Если* G_3-*алгоритм за конечное число итераций дает решение задачи* T_0, *то найдется такой номер итерации* $t \geqslant 1$, *что*

$$t \leqslant \delta, \quad x_{10}^{t} \leqslant -1.$$

Лемма 11. *Если*: 1) $1 \leqslant t \leqslant \delta$, 2) $x_{10}^t \leqslant -1$, то

$$I(T_0) \geqslant t + 1 \geqslant \frac{q^{r-2} + (r-2)}{]((r-1)(q-1)+1)/q[} + 1 \geqslant \frac{q^{r-2} + (r-2)}{r} + 1.$$

Здесь через $]Z[$ *обозначается наименьшее целое число, не меньшее* Z.

Из леммы 11 непосредственно следует формула (10), что и позволяет (см. выше) доказать теорему 2.

8. Лемма 11 позволяет непосредственно выписывать задачи целочисленного линейного программирования небольшого размера и с небольшими коэффициентами, для которых число итераций любого G_3-алгоритма (в том числе и третьего алгоритма Гомори) достаточно велико. Например, при $r = 10$ и $q = 10$ $(2r+1 = 21)$ получаем $I(T_0) \geqslant 10^7 + 2$.

9. Из лемм 9 и 10 непосредственно следует

Теорема 3. *Если* G_3-*алгоритм за конечное число итераций дает решение задачи* T_0, *то найдется такой номер итерации* $t \geqslant 1$, *что*

$$\max\{x_{r+i,0}^{t} \mid i = 1, \ldots, r\} \geqslant [q^{r-2} + (r-2)]/r.$$

Теорема 3 показывает, что задача T_0 «плохая» не только в том смысле, что она решается за большое число итераций, но и в том смысле, что в процессе решения задачи T_0 в симплексных таблицах могут возникать большие элементы.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. L. Balinski, Manag. Sci., 12, № 3, 253 (1965). [2] А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, М., 1969. [3] R. E. Gomory, In: Industrial Scheduling, New Jersey, 1963, ch. 13; русск. пер. Р. Е. Гомори, Календарное планирование, М., 1966, стр. 227. [4] Ю. Ю. Финкельштейн, Проблемы кибернетики, в. 21, 1969, стр. 249.