Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. ШУХМАН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 I 1970)

В основном наши обозначения соответствуют ([1]). Рассматривается пространство R^{l+1} векторов $x=(x_1, \ldots, x_l)$; x_0 иногда будем обозначать через t. Через S_t обозначим гиперплоскость $x_0=t$. Далее

$$D_x^\beta = \partial^{|\beta|}/\partial x_0^{\beta_0}\ldots\partial x_l^{\beta_l}, \quad |\beta| = \beta_0+\ldots+\beta_l.$$

Введем нормы

$$|D^n f, S_t|^2 = c\sup_{|\beta|\leqslant n} D_x^\beta f_0, S_t|_2^2 = c\sup_{|\beta|\leqslant n}\int_{S_t}|D_x^\beta f|^2\,dx_1\ldots dx_l,$$

$$\|D^n f, S_t\|^2 = c\sup_{|\beta|\leqslant n,\, K_t\subset S_t}|D_x^\beta f, K_t|_2^2 = c\sup_{|\beta|\leqslant n, K_t\subset S_t}\int_{K_t}|D_x^\beta f|^2\,dx_1\ldots dx_l,$$

где K_t — единичный куб в S_t.

Введем квазинормы

$$|D^{n,\infty}f, S_t, \rho| = \sum_{s=0}^\infty \frac{\rho^s}{s!}\sup_{|\sigma|=s}|D^n D_x^\sigma f, S_t|,$$

$$\|D^{n,\infty}f, S_t, \rho\| = \sum_{s=0}^\infty \frac{\rho^s}{s!}\sup_{|\sigma|=s}\|D^n D_x^\sigma f, S_t\|,$$

$$\sigma = (0, \sigma_1, \ldots, \sigma_l).$$

Далее везде предполагаем $n > l/2$.

Пусть дан формальный ряд

$$\Phi(t,\rho) = \sum_{s=0}^\infty \frac{\rho^s}{s!}\Phi_s(t)$$

и $\alpha > 1$. Введем оператор λ

$$\lambda\Phi(t,\rho) = \sum_{s=0}^\infty \frac{\rho^s}{(s!)^\alpha}\Phi_s(t).$$

Будем говорить, что $\Phi(t, \rho)\in\Gamma^{p(\alpha)}$, p — целое $\geqslant 0$, $\alpha>1$, если

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \lambda\Phi(t,\rho) = \sum_{s=0}^\infty \frac{\rho^s}{(s!)^\alpha}\frac{\partial^j\Phi_s}{\partial t^j}, \; j\leqslant p,$$

является голоморфной функцией по ρ в некоторой окрестности нуля.

Пусть $f\colon X\to C$, где X — полоса в R^{l+1}, $0\leqslant x_0\leqslant T$, C — комплексная плоскость. Будем говорить, что $f\in\gamma_2^{n(\alpha)}$ $(\gamma_{[2]}^{n(\alpha)})$, если

$$|D^{n,\infty}f, S_t, \rho|\in\Gamma^{0(\alpha)}\;(\|D^{n,\infty}f, S_t, \rho\|\in\Gamma^{0(\alpha)}).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$P(x, D)u = f;\quad D_0^j u|_{S_0} = 0,\quad j < m; \tag{1}$$

m — порядок P.

Теорема 1. *Пусть $P(x, D)$ имеет коэффициенты класса Жеврея $\gamma_{[2]}^{n(\alpha)}$ и, кроме того,*

$$P_m(x, \xi) = 0 \tag{*}$$

имеет относительно ξ_0 корни

$$\xi_0 = \lambda_1(x, \xi'), \ldots, \xi_0 = \lambda_m(x, \xi');\quad \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_l),$$

где $P_m(x, D)$ — *главная часть оператора P.*

Будем рассматривать случай гиперболического оператора, т. е. $\lambda_i(x, \xi')$ все вещественны. Если $\lambda_i(x, \xi')$ удовлетворяют условиям:

1. $\lambda_i(x, \xi') \in C^\infty$ *по совокупности переменных* (x, ξ') при $|\xi'| \neq 0$.

2. *Существует* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ |\xi'|\neq 0}} \lambda_i(x, \xi') = \lambda_i(\infty, \xi')$ *и* $\lambda_i(x, \xi') - \lambda_i(\infty, \xi') \in S$,

где S — пространство Шилова.

3. $\lambda_i(x, \xi' / |\xi'|) \in \gamma_{[2]}^{n(\alpha)}(X)$ *при всех* $|\xi'| \neq 0$, *как функции* x.

Тогда задача Коши (1) *имеет единственное решение* $u \in \gamma_2^{n(\alpha)}(Y)$ *для любой функции* $f \in \gamma_2^{n(\alpha)}(X)$; Y — *полоса* $0 \leqslant x_0 \leqslant T' \leqslant T$ *при* $1 \leqslant \alpha \leqslant m / (m-1)$.

Доказательство отличается от доказательства основной теоремы в [1] только тем, что производится замена оператора P

$$P(x, D) \equiv \Lambda_1 \ldots \Lambda_m + \Lambda,$$

где Λ_i — псевдодифференциальные операторы с символом

$$\xi_0 - \lambda_i(x, \xi'), \tag{2}$$

Λ — псевдодифференциальный оператор порядка $m-1$.

Предварительно для оператора с символом (2) доказывается оценка Гординга [2].

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при* $1 < \alpha \leqslant m / (m-1)$ *имеет место конечная область зависимости.*

Замечание 1. В случае постоянных коэффициентов теорема 1 известна и принадлежит Гордингу.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *существует единственное решение задачи Коши* (1) $u \in \gamma_2^{m+n-q(\alpha)}(Y)$ *для любой функции* $f \in \gamma_2^{n(\alpha)}(X)$, *полоса Y в* R^{l+1}: $0 \leqslant x_0 \leqslant T' \leqslant T$; q — *число непростых корней уравнения* (*).

Доказательство основано на представлении оператора P в виде

$$P = AB + C, \tag{3}$$

где A — строго гиперболический, B — гиперболический псевдодифференциальные операторы, C имеет сколь угодно малый порядок. Разложение строится следующим образом: из корней $\xi_0 - \lambda_1(x, \xi'), \ldots, \xi_0 - \lambda_m(x, \xi')$ выбираются $\xi_0 - \lambda_1, \ldots, \xi_0 - \lambda_r$ такие, что $\lambda_i(x, \xi') \neq \lambda_j(x, \xi')$, $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, m$, $|\xi'| \neq 0$. Образуем функции $\nu(x, \xi) = \prod\limits_{i=1}^{r} [\xi_0 - \lambda_i(x, \xi')]$ и $\mu(x, \xi) = \prod\limits_{i>r} [\xi_0 - \lambda_i(x, \xi')]$. Очевидно, что $\nu^2 + \mu^2 \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$. Считая, что символ A есть $a(x, \xi) = a_r(x, \xi) + \ldots$ и символ B есть $b(x, \xi) = b_{m-r}(x, \xi) + b_{m-r-1}(x, \xi) + \ldots$, полагаем $a_r = \nu(x, \xi)$, $b_{m-r} = \mu(x, \xi)$.

Пользуясь формулой для символа суперпозиции двух операторов ([4]), видим, что a_{r-1} и b_{m-r-1} могут быть выбраны следующим образом

$$a_{r-1}(x, \xi) = \mu(x, \xi) Q(x, \xi) / \nu^r(x, \xi) + \mu^2(x, \xi),$$

$$b_{m-r-1}(x, \xi) = \nu(x, \xi) Q(x, \xi) / \nu^r(x, \xi) + \mu^r(x, \xi),$$

где

$$Q = P_{m-1}(x, \xi) + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \nu(x, \xi)}{\partial x_i} \frac{\partial \mu(x, \xi)}{\partial \xi_i},$$

причем при таком выборе $a_{r-1}(x, \xi)$, $b_{m-r-1}(x, \xi)$ порядок оператора $(P - AB)$ не более $m - 2$. Аналогично можно выбрать и a_{r-2}, b_{m-r-2} и т. д. Остается применить индукцию по порядку m уравнения в предположении $q < m$ и воспользоваться неравенством Гординга для псевдодифференциальных операторов.

Теорема 4. *В условиях теоремы 1 существует единственное решение задачи Коши* (1) $u \in \gamma_2^{n(\alpha)}$ *для любой функции* $f \in \gamma_r^{n(\alpha)}$ *при* $1 < \alpha \leqslant q / (q - 1)$, *где* q — *максимальная кратность корня уравнения* $P_m(x, \xi) = 0$.

Доказательство основывается на разложении, похожем на разложение (3):

$$P \equiv AB_1 \ldots B_s + C,$$

где A — строго гиперболический, B_i — гиперболические псевдодифференциальные операторы, порядок C сколь угодно мал.

Выделим из корней $\xi_0 - \lambda_{r+1}, \ldots, \xi_0 - \lambda_m$ серии:

$$\xi_0 - \lambda_1^{(1)}, \ldots, \xi_0 - \lambda_{r_1}^{(1)}; \quad \xi_0 - \lambda_1^{(r)}, \ldots, \xi_0 - \lambda_{r_2}^{(r)}; \ldots$$

такие, что

$$\lambda_i^{(s)}(x, \xi') \neq \lambda_j^{(k)}(x, \xi')$$

при $s \neq k$, $i = 1, \ldots, r_s$, $j = 1, \ldots, r_k$, $x \in V$, $\xi' \in R^l$, $|\xi'| \neq 0$; V — некоторая окрестность точки x_0.

По этим корням строятся операторы B_i. После этого для доказательства остается воспользоваться разбиением единицы в пространстве $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_l)$, индукцией по m в предположении $q < m$ и т. д.

Замечание 2. Неулучшаемость результата теоремы 4 для всего класса гиперболических уравнений, кратность корней характеристических полиномов которых равна q, можно доказать аналогично соответствующему примеру в ([3]).

В заключение автор приносит благодарность В. Иврию, В. Малимову и М. Д. Рамазанову за многочисленные обсуждения.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Leray, Y. Ohya, Math. Ann., 170 (3), 67 (1967). [2] Л. Гординг, Задача Коши для гиперболических уравнений, М., 1961. [3] I. Leray, Math. Ann., 162 (2), 228 (1966). [4] Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг, В сборн. Псевдодифференциальные операторы, М., 1968, стр. 9.