Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

УДК 517.39+519.53+519.4+517.91 *МАТЕМАТИКА*

А. М. ВЕРШИК

УБЫВАЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 29 XII 1969)

Убывающие последовательности измеримых разбиений возникают в различных ситуациях, из которых следует выделить теорию эндоморфизмов пространств с мерой, теорию динамических систем, у которых время есть индуктивный предел компактных групп, и, наконец, теорию неизмеримых разбиений, имеющую ряд важных приложений к динамическим системам и кольцам операторов.

Основная цель этой работы — построение несколько неожиданного примера двух неизоморфных последовательностей, различающихся не слишком очевидным предельным инвариантом. Пример изложен в п. 4°; на основе его построен марковский регулярный процесс, отрицательно решающий проблему Леви (см. [1, 2]) для однородных условных мер.

1°. Убывающие последовательности. Пусть на отрезке $[0, 1]$ с лебеговой мерой (или на пространстве Лебега X с непрерывной мерой) задана монотонно убывающая последовательность измеримых разбиений $\xi = \{\xi_i\}_i$, $\xi_{i+1} < \xi_i$, $i = 1, \ldots$ [3]. Ставится задача метрической классификации таких последовательностей. Отвлекаясь от малоинтересного случая конечных последовательностей, эту проблему можно конкретизировать так.

Пусть две убывающих последовательности на X $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\xi' = \{\xi_i'\}_{i=1}^{\infty}$ финитно изоморфны, т. е. для всякого натурального n существует такой автоморфизм ($=$ взаимооднозначное mod 0 измеримое обратимое преобразование, сохраняющее меру) $X - T_n$, что $T_n\xi_i = \xi_i'$, $i = 1, \ldots, n$. Когда существует автоморфизм T, для которого $T\xi_i = \xi_i'$, $i = 1, \ldots$? Иначе говоря, каковы предельные инварианты убывающей последовательности измеримых разбиений? Задача легко переформулируется в терминах алгебр измеримых множеств или колец операторов.

Очевиден первый предельный инвариант — измеримое пересечение $\bigwedge_{i=1}^{\infty} \xi_i$. Его исключение (т. е. сведение задачи к случаю $\bigwedge_{i=1}^{\infty} \xi_i = \nu$, где ν — тривиальное разбиение) проводится подобно разложению автоморфизма на эргодические компоненты [3]. Новым и полезным во многих вопросах является другой инвариант — сопутствующее разбиение. Пусть $\xi = \{\xi_i\}$ — конечная или бесконечная последовательность измеримых разбиений. Сопутствующим разбиением $\Xi(\xi)$ называется самое мелкое из всех измеримых разбиений, остающихся неподвижными при действии группы автоморфизмов, относительно которой все ξ_i инвариантны (иначе говоря, $\Xi(\xi)$ есть разбиение на эргодические компоненты этой группы). Очевидно, что любой автоморфизм T, переводящий ξ в ξ', переводит $\Xi(\xi)$ в $\Xi(\xi')$ фиксированным образом, т. е. индуцированный изоморфизм $T_\Xi: X / \Xi(\xi) \to X / \Xi(\xi')$ не зависит от T.

Если $\Xi(\xi) = \varepsilon$ (ε-разбиение на отдельные точки mod 0), то последовательность ξ называется абсолютно неоднородной (пример: S-эндоморфизм Бернулли с двумя состояниями и вероятностями $p \neq 1/2$ и q; тогда $\{S^{-i}\varepsilon\}_{i=1}^{\infty}$ абсолютно неоднородна). Наиболее труден и интересен в классификационной задаче случай однородной последовательности $\Xi(\xi)=\nu$. К нему, используя сопутствующее разбиение, можно свести общую задачу классификации. Конечные отрезки однородной последовательности выглядят очень просто.

Лемма 1. *Всякая конечная однородная убывающая последовательность измеримых разбиений* $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ *задается с точностью до изоморфизма* n *числами* r_i, $i=1,\ldots,n$, *принимающими натуральные значения или* $+\infty$; r_i *есть число точек в элементе разбиения* ξ_i/ξ_{i-1}, $i=1,\ldots,n$, $\xi_0=\varepsilon$, *которое одинаково для почти всех элементов* (X/ξ_i *предполагается недискретным*, $i=1,\ldots,n$).

Однородная последовательность $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ называется диадической, если $\xi_i\searrow\nu$ и $r_i=2$ при всех i. Почти каждый элемент разбиения ξ_i в такой последовательности состоит из 2^i точек равной (условной) меры $i=1,\ldots$ Диадические последовательности в силу леммы финитно изоморфны. В их классификации — центральная трудность общей задачи. Простейший пример диадической последовательности — стандартная диадическая последовательность: $\xi^{(0)}=\{\xi_i^{(0)}\}_{i=1}^\infty$; $X=[0,1]$; элемент $\xi_i^{(0)}$ есть множество, содержащее с данным числом все, отличающиеся от него лишь первыми i знаками в двоичном разложении.

В ([4]) доказано, что любые две диадические последовательности ξ и ξ' лакунарно изоморфны, т. е. существует последовательность натуральных $i_k\nearrow\infty$ такая, что $\{\xi_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ и $\{\xi'_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ изоморфны. Этот результат весьма существен для траекторной теории динамических систем (см. ([5])) и ряда вопросов теории колец операторов. Однако сформулированное в (([4]), стр. 18) без доказательства и не использованное там более общее утверждение об изоморфизме всех диадических последовательностей оказалось ошибочным *. Из него, конечно, как это отмечается в ([4]), следовал бы и лакунарный изоморфизм.

Теорема 1. *Существует диадическая последовательность, не изоморфная стандартной диадической последовательности.*

Эскиз доказательства этой теоремы в следующих пунктах. Построение такой последовательности служит основой для примеров. На самом деле, существует континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей (см. п. 5°).

2°. Универсальный проектор. Пусть η — измеримое разбиение пространства Лебега (X,μ); $L(X;K)$ — пространство всех измеримых отображений X в метрический компакт K. Универсальным проектором относительно η называется отображение $\mathscr{P}_\eta$: $L(X;K)\to L(X;{}^1S(K))$, где $S(K)$ есть симплекс всех неотрицательных нормированных мер на K, а $\mathscr{P}_\eta$ строится следующим образом: пусть $f\in L(X;,K)$; рассматривая ограничение f на почти каждый элемент C разбиения η, получим определенное $\bmod 0$ однозначно измеримое семейство $\{f_C\}_{C\in\eta}$, f_C: $C\to K$, и если $\{\mu_C\}$ — каноническая система мер (μ_C — условная мера на C — см. ([3])), а $f\mu_C$ — образ μ_C при отображении f_C, то $(\mathscr{P}_\eta f)(x)=f\mu_{C(x)}$, где $C(x)$ — элемент η, содержащий x.

Пусть $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n$ — убывающая последовательность разбиений. Универсальный проектор для ξ определяется так: $\mathscr{P}_\xi=\mathscr{P}_{\xi_n}\ldots\mathscr{P}_{\xi_1}$. $\mathscr{P}_\xi$ есть оператор из $L(X;K)$ в $L(X;S_n(K))$, где $S_n(K)=S(S_{n-1}(K))$ **. В терминах $\mathscr{P}_\xi$ можно легко описывать инвариантные свойства множеств и функций относительно ξ, в частности, дать классификацию конечных убывающих последовательностей (более традиционный подход к такой классификации в ([8])). Польза универсальных проекторов видна из следующей теоремы.

* К сожалению, эта формулировка попала в работы (([6]), стр. 51) и (([7]), стр. 277). Автор приносит глубокие извинения авторам ([6, 7]).

** $S(K)$ — метризуемый компакт в слабой топологии.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы диадическая последовательность* $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ *на* (X, μ) *была изоморфна стандартной, необходимо и достаточно, чтобы для всякого измеримого* $A \subset X$ *и любого* $\gamma > 0$ *существовало такое* n *и элемент* $\alpha_n \in S_n(\{0; 1\})$, *что* $\int\limits_x \rho_n([\mathscr{P}_{\{\xi_i\}_{i=1}^n}\chi_A](x), \alpha_n)\,d\mu < \gamma$; *здесь* χ_A — *характеристическая функция множества* A; ρ_n — *метрика на* S_n, *определяемая индуктивно* $\rho_n(\alpha, \alpha') = \inf\int\limits_X \rho_{n-1}(g(x), g'(x))\,d\mu$, *где* $\inf$ *берется по всем таким парам* $g, g' \in L(X; S_{n-1})$, *что* $g\mu = \alpha$, $g'\mu = \alpha'$ *и* $\rho_0(\{0\}, \{1\}) = 1$ *.

Комментируя теорему 2, отметим, что ее условие требует почти постоянства $\mathscr{P}_{\{\xi_i\}_1^n}\chi_A$, а постоянство последней функции означает измеримость A относительно хорошо согласованного с $\{\xi_i\}_1^n$, независимого дополнения ζ к ξ (аналогичного разбиению $[0, 1]$ на отрезки $[p/2^n, (p+1)/2^n]$, $p = 0, \ldots, 2^n - 1$, являющегося независимым дополнением к $\xi_n^{(0)}$).

С л е д с т в и е 1. *Эргодическое действие с дискретным спектром группы* D *всех корней из единицы степени* 2^n, $n = 1, \ldots$, *на отрезке порождает стандартную диадическую последовательность* $\{\xi_n\}$ (*здесь* ξ_n — *разбиение на траектории подгруппы корней степени* 2^n).

Достаточно заметить, что существует мультипликативный базис на отрезке, из элементов которого можно составить систему ζ.

3°. К о м б и н а т о р н ы е л е м м ы. Выясним подробнее структуру области значений $\mathscr{P}$ для диадической последовательности. Так как почти каждый элемент ξ_i имеет две точки равной условной меры, то значениями $\mathscr{P}_{\xi_i}f$, $f \in L(X; K)$, будут меры на K вида $\frac{1}{2}(\delta_{k_1} + \delta_{k_2})$; $k_{1,2} \in K$. Обозначим множество их через $S^d(K) \subset S(K)$. Аналогично $\mathscr{P}\{\xi_i\}_1^n f \in S_n^d(K)$, где $S_n^d(K) = S^d(S_{n-1}^d(K))$. Пусть I_N — множество вершин N-мерного единичного куба; H_n — группа подстановок 2^n символов $1, 2, \ldots, 2^n$, строящаяся и индуктивно: $H_1 = \mathfrak{S}_2$; H_n — минимальная подгруппа $\mathfrak{S}_{2^n}$, включающая группу $H_{n-1} \times H_{n-1}$ (где сомножители действуют соответственно на символах $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ и $2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$, а также подстановку $(1, 2^{n-1}+1) \times (2, 2^{n-1}+2) \ldots (2^{n-1}, 2^n)$. Действие H_n, примененное к координатам 2^n-мерного куба индуцирует ее действие на I_{2^n}, обозначаемое той же буквой H_n. Введем на I_N метрику Хэмминга $r_N(q, q') = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} |q_i - q_i'|$ и перенесем ее на I_{2^n}/H_n по правилу $\bar r_{2^n}(Q, Q') = \inf r_{2^n}(q, q')$; $q \in Q$, $q' \in Q'$.

Л е м м а 2. $(S_n^d(\{0; 1\}), \rho_n)$ *канонически изометрично* $(I_{2^n}/H_n, r_{2^n})$.

Пусть m_N — равномерное распределение на I_N.

Л е м м а 3. *Для того чтобы последовательность множеств* $\Gamma_N \subset I_N$, $N = 1, \ldots$, *обладала свойством: для всякого* $\gamma > 0$ $\lim\limits_{N\to\infty} m_N\{q \in I_N: r_N(q, \Gamma_N) < \gamma\} = 1$, *необходимо, чтобы* $|\Gamma_N| \sim 2^{N(1-\beta_N)}$, $\beta_N \to 0$.

Л е м м а 4. *Самая длинная траектория* H_n в I_{2^n} *имеет* $2^{3/4 \cdot 2^n - 1}$ *точек* $(n \geqslant 2)$.

С л е д с т в и е 2. *Последовательность* $\bar m_{2^n}$ *проекций мер* m_{2^n} *на* I_{2^n}/H_n *не сходится слабо к* δ-*мере, т. е. для всякой последовательности* $\{Q_n\}$, $Q_n \in I_{2^n}/H_n$, $n = 1, \ldots$, *и* $\gamma > 0$ $\overline{\lim}\, \bar m_{2^n}\{Q \in I_{2^n}/H_n: \bar r_{2^n}(Q, Q_n) < \gamma\} < 1$.

4°. П р и м е р ы. Пусть G — счетная группа; $F(G)$ — пространство всех функций на G со значениями 0 или 1; мера ν на $F(G)$ — счетное произведение мер $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ на $\{0; 1\}$; G действует как группа автоморфизмов на $(F(G), \nu)$: $g \mapsto V_g$ $(V_g f)(h) = f(gh)$, $f \in F(G)$; $(\{V_g\}$ — обобщенная группа Бернулли).

* Эта метрика совпадает с метрикой Канторовича — Рубинштейна ([11]).

а) Пусть D — группа всех корней степени 2^n, $n = 1, \ldots,$ из единицы. ε_n-разбиение $(F(D), \nu)$ на траектории действия (периодического) автоморфизма V_{g_n}, где g_n — первообразный корень степени 2^n.

Диадическая последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не изоморфна стандартной.*

Доказательство. Пусть $A = \{f \in F(D) : f(e) = 1\}$. Проверяется, что образ ν при отображении $\mathcal{P}_{\{\varepsilon_i\}_1^n} \chi_A : F(D) \to S_n^d(\{0; 1\}) = I_{2^n/H_n}$ есть мера $\widetilde{m}_{2^n}$, и из следствия 2 вытекает, что условия теоремы 2 не выполняются. Пример, доказывающий теорему 1, построен.

б) Построим марковский процесс — случайное блуждание по траекториям динамической системы *.

Пусть W_2 — свободная группа с двумя образующими w_1 и w_2, $T_i = V_{w_i}$, $i = 1, 2,$ — автоморфизмы $(F(W_2), \nu)$ (см. выше). Марковский процесс, а с ним и марковский эндоморфизм R определяется так: множество состояний $F(W_2)$, начальное распределение ν; переходная вероятность $p(f, E) = 1/2$, если $T_1 f \in E$, или $T_2 f \in E$ и 0 в остальных случаях. Этот эндоморфизм точен (процесс регулярен), если энтропия легко вычисляется: $h(R) = H(\varepsilon | R^{-1}\varepsilon) = 1$.

Построенный марковский эндоморфизм R не есть фактор-эндоморфизм эндоморфизма Бернулли с двумя состояниями равной меры.

Доказательство. Диадическая последовательность $\{R^{-n}\varepsilon\}_{n=1}^{\infty}$ не изоморфна стандартной (см. пример а); в качестве A нужно взять множество траекторий $x = (x_n)_{n \leq 0}$, для которых $x_0(e) = 1$, e — единица W_2 **.

5°. Замечания. 1. Существование континуума попарно неизоморфных диадических последовательностей устанавливается с помощью понятия энтропии последовательности разбиений.

2. За неимением места здесь не излагаются приложения к теории неизмеримых (аппроксимативно измеримых) разбиений.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
25 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Rosenblatt, J. Math. Mech., 8, 5, 665 (1959). [2] M. Rosenblatt, ibid., 9, 6, 945 (1960). [3] В. А. Рохлин, УМН, 4, 2, 57 (1949). [4] А. М. Вершик, Функциональн. анализ, 2, 3, 17 (1968). [5] Р. М. Белинская, То же, 2, 3, 4 (1968). [6] В. А. Рохлин, УМН, 5 (137), 3 (1967). [7] Д. А. Владимиров, Булевы алгебры, «Наука», 1969. [8] О. В. Гусева, Вестн. ЛГУ, № 1, в. 1, 14 (1965). [9] S. Kakutani, Proc. 2-nd Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., 1951, p. 247. [10] В. И. Оселедец, Теория вероятн. и ее применение, 10, 3 (1965). [11] Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, Вестн. ЛГУ, 7, № 2, 52 (1958).

* Подобные марковские процессы рассматривались в ([9]) — условия эргодичности и в ([10]) — K-свойство.

** Построенный марковский процесс обладает парадоксальным свойством, которое в вольном изложении выглядит так. Предположим, что процесс развития математики таков же, как построенный процесс; если РЖМ каждый год, начиная от $-\infty$, выпускает том «Итогов науки», содержащий лишь все существенно новое, открытое в данном году, то прочтение всех этих томов не позволяет полностью восстановить картину математики на любой данный год. (Разумеется, никаких нетривиальных открытий в $-\infty$ не происходило.)