

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. А. САПОЖНИКОВ, В. Н. ШТЕРН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ В ВЯЗКОМ ПОДСЛОЕ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

(Представлено академиком В. В. Струминским 30 X 1970)

Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений, использованный для вычисления константы Кармана турбулентного потока в плоском канале (^{1, 2}), привел к результатам, удовлетворительно согласующимся с опытом. При этом в конкретных расчетах использовалось допущение о пренебрежимости непосредственного взаимодействия турбулентных пульсаций с малым возмущением, внесенным в поток, по сравнению с влиянием на возмущение профиля осредненной скорости.

Это допущение существенно, так как позволяет довести задачу до числа, используя методы традиционной теории гидродинамической устойчивости и не затрагивая сложных вопросов, связанных с построением модели взаимодействия пульсаций и возмущения.

Известно (³), что на устойчивость плоско-параллельных пристенных ламинарных потоков разнообразны факторы, такие как магнитное поле или отсос, сказывающиеся в основном через деформацию профиля скорости. Непосредственное влияние этих факторов на поведение малых возмущений, связанное с появлением дополнительных членов в уравнении Орра — Зоммерфельда, несущественно.

Можно ожидать, что в пристенных турбулентных потоках стабилизирующее действие турбулентных пульсаций тоже проявляется в основном через деформацию профиля осредненной скорости. Об этом свидетельствуют и результаты расчетов (^{1, 2}). Есть, однако, случаи (затопленная струя, след за плохо обтекаемым телом), когда ламинарные и турбулентные профили скорости близки по форме, и устойчивость осредненного турбулентного потока обеспечивается именно непосредственным взаимодействием турбулентных пульсаций и внешних возмущений.

Представляется разумным перед попытками учесть это взаимодействие, что может быть связано с новыми допущениями, предпринять дополнительную проверку принципа максимальной устойчивости в условиях, когда можно заведомо ограничиться учетом взаимодействия лишь с осредненным профилем скорости. Такие условия существуют. Как показали исследования авторов (⁴), задача гидродинамической устойчивости обладает свойствами локальности.

Наряду с глобальной устойчивостью всего потока, которая определяется поведением длинноволновых возмущений с длиной волны больше или порядка характерных размеров потока, можно изучать локальную устойчивость отдельных участков потока к коротковолновым возмущениям с длиной волны меньше или порядка размера рассматриваемого участка.

Здесь важно отметить, что в случае затухания малых возмущений характеристики локальной и глобальной устойчивости (соответствующие декременты затухания) практически находятся независимо друг от друга. Коротковолновые возмущения обладают свойством финитности, т. е. амплитуда их практически отлична от нуля лишь на малом участке потока порядка длины волны. Малая локальная деформация профиля скорости мо-

жет повлиять существенно только на поведение коротковолновых возмущений, локализованных в зоне этой деформации.

Наиболее существенно, что для коротковолновых возмущений, размеры которых значительно меньше масштабов турбулентных пульсаций, ответственных за перенос импульса, их поведение будет целиком определяться только взаимодействием со средним потоком и заведомо может быть описано в рамках обычной теории гидродинамической устойчивости.

Если рассмотреть весь спектр малых возмущений, то, вообще говоря, коротковолновые возмущения будут локализованы на всех участках потока, но для выпуклых профилей, характерных для напорных течений в каналах, наиболее опасные коротковолновые возмущения (т. е. медленнее других затухающие) располагаются вблизи максимума средней скорости и у стенок канала (4). В работе (5) был рассмотрен приосевой участок потока, где скорость достигает максимума,

и было показано, что в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса наиболее устойчивым к коротковолновым возмущениям распределением средней скорости является полукубическая парабола, что соответствует экспериментальному закону Дарси для турбулентного ядра.

Здесь будет рассмотрена локальная устойчивость пристенной области, т. е. так называемого вязкого подслоя и буферной области. Вне этой зоны предполагается логарифмический закон распределения скорости. Класс профилей, испытываемых на устойчивость, будет выбираться на основе уравнения динамики.

$$v \frac{du}{dy} + l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} = v_*^2, \quad (1)$$

где v_* — динамическая скорость, u — осредненная скорость потока, v — коэффициент кинематической вязкости, y — расстояние от стенки канала, l — длина пути смещения.

Ниже будут использоваться безразмерные величины

$$u_+ = u/v_{*0}; \quad y_+ = yv_{*0}/\nu; \quad L = lv_{*0}/\nu; \quad Re_+ = v_{*0}h/\nu; \\ c_+ = X + iY = c/v_{*0}; \quad a_+ = \alpha v/v_{*0}; \quad a_1 = ah = a_+ Re_+,$$

где v_{*0} — значение динамической скорости на стенке, α — волновое число возмущения, c — комплексная скорость распространения возмущения, h — полуширина канала, Re_+ — число Рейнольдса потока.

Для длины пути смещения принята зависимость

$$L^2 = \kappa^2 y_+^2 [1 - \exp(-y_+/A)]^n. \quad (2)$$

Она является обобщением аппроксимационной формулы Ван Дриста (6) (где $n = 2$) и содержит два параметра A и n , которые здесь определяются из условия максимальной устойчивости.

Константа κ характеризует логарифмический участок и считается известной ($\kappa = 0,4$). Зона деформации профиля скорости при расчетах была внутри интервала $0 < y_+ < 100$.

На рис. 1 представлена зависимость $Y(\alpha_1)$ (кривая 1) для наиболее опасной пристенной моды спектра возмущений в случае течения в плоском канале при $n = 1$, $A = 100$, $Re_+ = 500$. Максимум $Y(\alpha_1)$, расположенный при $\alpha_1 \sim 10^2$, соответствует возмущениям, длина волны которых много

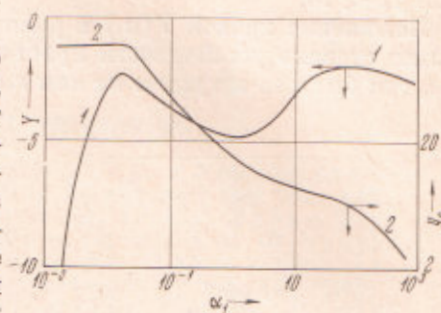


Рис. 1

меньше h и которые отвечают за локальную устойчивость пристенной зоны. Кривая 2 на рис. 1 показывает положение критической точки y_c , т. е. того места, где фазовая скорость возмущения совпадает с местной скоростью потока и где локализовано коротковолновое возмущение (y_c — корень уравнения $u_+(y_+) = X$), в зависимости от волнового числа. Наиболее опасные коротковолновые возмущения при этом имеют критическую точку на участке $y_+ < 10$.

Положение кривой $Y(\alpha_1)$ в районе коротковолнового максимума определяет степень устойчивости пристенного участка. Чем ниже лежит кривая, тем быстрее затухают на нем коротковолновые возмущения. На рис. 2

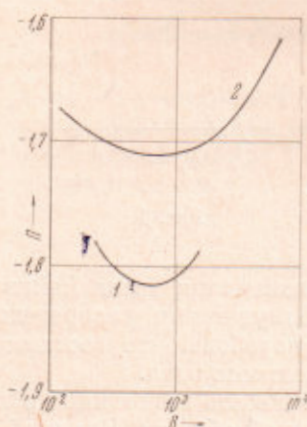


Рис. 2

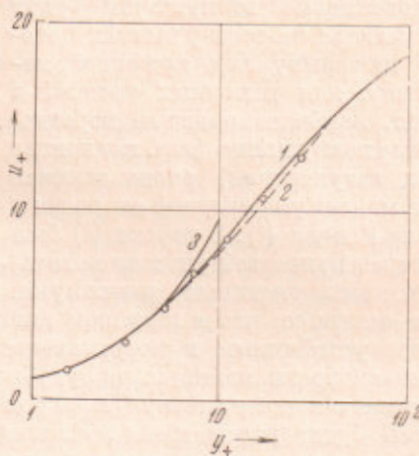


Рис. 3

представлена зависимость $\Pi = \max_{\alpha} Y$ от комплекса $B = A^n / \kappa^2$ при $n = 1$ (кривая 1) и $n = 2$ (кривая 2). Комплекс B определяет длину пути смешения при $y_+ \ll A$:

$$L^2 \simeq y_+^{2+n} / B. \quad (3)$$

В обоих случаях наиболее устойчивое распределение скорости соответствует $B \approx 640$, но кривая 1 лежит значительно ниже. Это свидетельствует, что максимальной устойчивости отвечает $n = 1$. Были проведены расчеты, где n задавался не целым числом в интервале $0 < n < 2$; и в этом случае максимальная устойчивость наблюдалась при n , близком к 1.

Отметим, что случай $n = 1$ отвечает кубической зависимости турбулентной вязкости $l^2 |du/dy|$ от расстояния до стенок в начале буферной зоны, в то время как аппроксимация Ван Дриста ($n = 2$) дает четвертую степень. В последнее время вопрос о том, какой должна быть эта степень, широко обсуждался (^{7, 8}). Данная работа показывает, что кубическая зависимость отвечает наиболее устойчивому распределению скорости.

Во всем исследованном диапазоне чисел Рейнольдса $500 \leq \text{Re}_+ \leq 1200$ максимально устойчивому профилю скорости отвечали параметры $n = 1$, $A = 100$. При этом наиболее опасное возмущение имело длину $\lambda = 2\pi/a = 69$ и было локализовано в окрестности $y_+ \approx 7$.

Продольный масштаб возмущения значительно больше поперечного. Такой же вытянутый характер вихрей в вязком подслое был зафиксирован при экспериментальном исследовании пристенной зоны (⁹), однако продольный масштаб турбулентных пульсаций, проникающих в подслое, был значительно больше $\lambda \sim 300 \div 400$.

На рис. 3 кривой 1 представлено наиболее устойчивое распределение скорости в вязком подслое и буферной зоне. Пунктирная линия 2 соответствует осредненному по большому числу данных экспериментальному про-

филю (7). Точками помечены данные, полученные непосредственно в Институте теплофизики СО АН СССР (10). Кривая 3 отвечает линейному распределению скорости $u_+ = y_+$.

Таким образом, пристенный участок универсального профиля скорости, рассчитанный на основе принципа максимальной устойчивости, находится в хорошем согласии с экспериментальными данными.

Институт теплофизики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Гольдштик, ДАН, 182, № 5 (1968). ² М. А. Гольдштик, С. С. Кутателадзе, ДАН, 185, № 3 (1969). ³ R. C. Lock, Proc. Roy. Soc., A233, № 1192 (1955). ⁴ М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, В. Н. Штерн, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 2 (1970). ⁵ М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, ДАН, 188, № 4 (1969). ⁶ E. R. Van Driest, J. Aeronaut. Sci., 23, № 11 (1956). ⁷ А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, 1, «Наука», 1965. ⁸ T. K. Sherwood, K. A. Smith, S. E. Fowles, Chem. Eng. Sci., 23, № 10 (1968). ⁹ J. E. Mitchell, J. T. Hanratty, J. Fluid Mech., 26, part 1 (1966). ¹⁰ В. В. Перепелица, Е. М. Хабахпашева, Инж. физ. журн., 18, № 5 (1970).