Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

УДК 513.881 *МАТЕМАТИКА*

М. М. ДРАГИЛЕВ

О КРАТНЫХ ПРАВИЛЬНЫХ БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ КЁТЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 26 IX 1969)

1. Пусть E — пространство Кёте *; (x_n) — его произвольный абсолютный базис; (y_n) — один из тех абсолютных базисов в E, которые можно получить в результате следующих трех операций: а) отображения $(x_n) \to (Tx_n)$, где T — изоморфизм пространства E на себя; б) умножения элементов Tx_n на числа λ_n, $\lambda_n \neq 0$ $(n = 1, \ldots)$; в) перестановки членов последовательности $(\lambda_n Tx_n)$. Базисы (x_n) и (y_n) называют соответственно эквивалентными, предэквивалентными и квазиэквивалентными. До настоящего времени не решен полностью вопрос (см., например, ([1])): в каком случае все абсолютные базисы пространства находятся в одном из перечисленных отношений эквивалентности?

Нетрудно видеть, что любые два базиса в E эквивалентны тогда и только тогда, когда пространство конечномерно (при этом существенно, что топологию в E можно задать счетным набором норм ([2])). Аналогично все абсолютные базисы в E предэквивалентны в том и только том случае, когда E нормируемо (т. е. вырождается в банахово пространство l_1) **. Не известно, однако, являются ли квазиэквивалентными все абсолютные базисы невырожденного пространства E. Положительный ответ удалось получить лишь для некоторых специальных классов ядерных и монтелевских пространств Кёте, обладающих правильным *** базисом ([3-9]).

В статье рассматривается более общий случай. Пусть (x_n) — произвольная последовательность в E; μ — минимальное число ее правильных подпоследовательностей таких, что каждый элемент x_n содержится в одной и только одной из них. Положим $m = \inf \mu$, где inf берется по множеству всевозможных перестановок из элементов x_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Последовательность, для которой $m \neq 1$, нельзя сделать правильной перестановкой элементов. Естественно назвать ее m-кратной правильной последовательностью, если m конечно и $\mu = m$. Это определение мы распространим также на случай, когда $m = 1$ или $m = \infty$. Как будет показано, кратность m произвольного базиса в ядерном пространстве E зависит только от пространства. Иными словами, каждое ядерное пространство Кёте принадлежит одному и только одному из классов: $\mathcal{N}_s = \{E\colon\ m = s\}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Все классы $\mathcal{N}_s$ не пусты. Любой из них за исключением, быть может, $\mathcal{N}_\infty$ содержит пространства, все базисы которых квазиэквивалентны.

2. Пусть (x_n) — последовательность в E, элементы которой не равны нулю; $(t_n) = t$ — произвольная числовая последовательность и $|t|_p = \sum\limits_n |t_n| \|x_n\|_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Условимся через $[x_n]$ обозначать пространство Кёте $\{t\colon\ |t|_p < \infty,\ p = 1, \ldots\}$ (с топологией, задаваемой си-

* Пространством Кёте называют полное счетнонормированное пространство с абсолютным базисом Шаудера.

** Более частное утверждение доказывается в ([10]).

*** Поседовательность (x_n), $x_n \in E$ $(1 \leqslant n < \nu \leqslant \infty)$ называют правильной, если найдется такая производящая система норм в E, что при любых p, $q = 1, 2, \ldots$ последовательность чисел $\|x_n\|_p / \|x_n\|_q$ $(1 \leqslant n < \nu \leqslant \infty)$ монотонна ([7]).

стемой норм $|\cdot|_p$). Если E — монтелевское пространство с абсолютным правильным базисом (x_n), то обозначим $K(E) = \{[\lambda_n x_{k_n}]\colon k_n \to \infty, \lambda_n > 0, n = 1, \ldots\}$.

Предположим, что все правильные базисы в E предэквивалентны (в этом случае $K(E)$ не зависит от выбора базиса) и, более того, что любое пространство, содержащееся в $K(E)$, обладает аналогичным свойством. Класс $\mathscr{E}$ всех рассматриваемых пространств E не пуст (он содержит, в частности, пространства типа (d_i), $i = 1, 2$ ([7])). При этом $E \in \mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда $K(E) \subset \mathscr{E}$.

Положим для произвольных пространств $E_i \in \mathscr{E}$ $(i = 1, 2)$

$$K(E_1) \oplus K(E_2) = \{G_1 \oplus G_2\colon\ G_i \in K(E_i),\ i = 1, 2\}.$$

Пусть R — подмножество класса $\mathscr{E}$, замкнутое относительно операции $\oplus$. Говорят, что функция $K(E)$ аддитивна на R, если $K(E_1 \oplus E_2) = K(E_1) \oplus K(E_2)$ для любых $E_i \in R$ $(i = 1, 2)$.

Определение 1. Максимальное подмножество $R \subset \mathscr{E}$, замкнутое относительно операции $\oplus$, назовем классом Рисса, если функция $K(E)$ аддитивна на R.

Например, множество R_0 (соответственно, R_∞) всех пространств Кёте, являющихся конечными (бесконечными) центрами шкал Рисса ([5]) есть класс Рисса. Пусть, вообще, E — произвольное пространство типа (d_1) либо (d_2). Справедлива

Теорема 1. *Множество $K(E)$ тогда и только тогда является классом Рисса, когда E изоморфно любому своему подпространству конечной коразмерности.*

В дальнейшем класс Рисса мы называем полным, если существует такое пространство $E \in R$, что $K(E) = R$.

Отметим следствия. Пусть $f(u)$ — неубывающая нечетная функция вещественного аргумента, логарифмически выпуклая при $u \geqslant 0$. В ([7]) рассмотрен широкий класс монтелевских пространств Кёте $L_f(b, r) \rightleftharpoons [(\delta_{nj})_{j=1}^{\infty}]$, для которых $|(\delta_{nj})_{j=1}^{\infty}|_p = \exp f(r_p b_n)$ $(r_p \uparrow r)$, где $-\infty < r \leqslant \infty$, $b = (b_n)$ и $b_n \uparrow \infty$. По определению $(f)_\sigma = \{L_f(b, r)\colon b_n \uparrow \infty, r = \sigma\}$ $(\sigma = -1, 0, 1, \infty)$. Там же выделяются несчетные семейства попарно не пересекающихся классов $(f)_\sigma$.

Следствие 1. *Множество $(f)_\sigma$ есть полный класс Рисса.*

Следствие 2. *Мощность максимального множества попарно не пересекающихся полных риссовских классов, по меньшей мере, равна c.*

Следствие 3. *Множество $\mathfrak{R}$ всех классов Рисса несчетно.*

Сформулируем необходимые и достаточные условия для того, чтобы классы $R_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2)$ не пересекались. Пусть $T\colon E_1 \to E_2$ — такой непрерывный линейный оператор, который переводит абсолютный базис (x_n) пространства $E_1 \in R_1$, в абсолютный базис пространства $E_2 \in R_2$.

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны:*

1°. $R_1 \cap R_2 = \phi$.

2°. *Каковы бы ни были пространства $E_i \in R_i$ $(i = 1, 2)$, абсолютный базис (x_n) в E_1 и оператор T, найдется такая подпоследовательность $(x_{j_n}, n = 1, 2, \ldots)$, что сужение T на соответствующее подпространство $\overline{\operatorname{span}(x_{j_n})} \subset E_1$ компактно *.*

Если классы R_1 и R_2 таковы, что все непрерывные линейные отображения каждого пространства $E_1 \in R_1$ в любое пространство $E_2 \in R_2$ компактны, то будем писать $R_1 > R_2$.

Определение 2. *Классы $R_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2)$* назовем существенно различными, если $R_1 > R_2$ или $R_2 > R_1$.

---

* Определение компактного оператора см., например, ([11]).

Например, классы R_0 и R_∞ существенно различны, причем $R_0 > R_\infty$ ([2]). Как показал В. П. Захарюта (там же) существуют несчетные семейства риссовских классов $(f)_\sigma$, линейно упорядоченные отношением $(\geqslant)$. Не известно, являются ли существенно различными любые не пересекающиеся классы $R_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2)$.

Замечание. Не пересекающиеся подмножества $K(E_i) \subset R_i$ $(i = 1, 2)$ могут не быть существенно различными в смысле определения 2.

Пусть, далее $E = \oplus E_i$, где $E_i \in R_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $R_i = K(E_i)$ для $i \leqslant s \leqslant k$, т. е. все риссовские классы $R_1, \ldots, R_s$ полны, а соответствующие пространства E_i удовлетворяют условию теоремы 1. Важной для дальнейшего является

Теорема 3. *Если* $1 < s \leqslant k$ *и все* R_i *различны (соответственно* $1 \leqslant s < k$ *и* $R_i \cap R_j = \phi$ *при* $i \leqslant s < j$*), то в пространстве* E *существует* m*-кратный правильный базис, для которого* $m \geqslant s$ *(соответственно* $m \geqslant s + 1$*). При этом равенство достигается в любом случае.*

3. Пусть $E \subset \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — класс всех ядерных пространств Кёте. Как известно ([12]), все базисы в E абсолютны.

Лемма (ср. ([7], [8])). *Каковы бы ни были базисы* (x_n) *и* (y_n) *в* E*, найдутся две последовательности* (k_n), $k \to \infty$, *и* (λ_n), $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *такие, что* $[y_n] = [\lambda_n x_{k_n}]$.

Приведем ряд следствий, часть которых имеет самостоятельный интерес.

Следствие 1. *В ядерном пространстве с правильным базисом кратность* m *произвольного базиса равна единице.*

Следствие 2. *В ядерном пространстве* $E \in \mathcal{E}$ *все базисы квазиэквивалентны.*

Продолжим на весь класс $\mathcal{N}$ определенную на множестве $\mathcal{N} \cap \mathcal{E}$ функцию $K(E)$ (при этом в качестве (x_n) берется произвольной базис пространства).

Следствие 3. *Функция* $K(E)$ *не зависит от выбора базиса в* E *и является топологическим инвариантом на классе* $\mathcal{N}$.

Следствие 4. *Кратность* m *произвольного базиса в ядерном пространстве* E *есть константа, зависящая только от* E.

Следствие 5. *Каждое пространство* $E \in \mathcal{N}$ *принадлежит одному и только одному из классов* $\mathcal{N}_s$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$.

Отсюда, а также из теорем 1 (следствие 2) и 3 вытекает

Следствие 6. *Ни один из классов* $\mathcal{N}_s$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ *не пуст.*

Пусть, далее, E^j означает подпространство пространства E коразмерности j при $j \geqslant 0$ и прямую сумму вида $E \oplus L$, где $\dim L = -j$, при $j < 0$. Из следствия 3 вытекает теорема условного характера.

Теорема 4. *Пусть* $E = \oplus E_i$, *где* $E_i \in R_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ *ядерные пространства, и* $R_i \cap R_k = \phi$, *если* $i \neq k$. *Следующие утверждения равносильны:*

1°. *В пространстве* E *все базисы квазиэквивалентны.*

2°. *Каковы бы ни были ядерные пространства* $G_i \in R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, *изоморфизм* $E \sim \oplus G_i$ *имеет место тогда и только тогда, когда найдутся* j_i, $\sum_i j_i = 0$, *такие, что* $E_i \sim G_i^{j_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Нам остается применить следующий результат.

Теорема 5 (см. ([2])). *Пусть* X_i *и* Y_i $(i = 1, 2)$ *— линейные топологические пространства такие, что всякое непрерывное линейное отображение из* X_1 *в* Y_2 *и из* Y_1 *в* X_2 *компактно. Произведения* $X_1 \times X_2$ *и* $Y_1 \times Y_2$ *изоморфны тогда и только тогда, когда при некотором конечном* j $X_1 \sim Y_1^j$ *и* $X_2 \sim Y_2^{-j}$.

Непосредственным следствием теорем 3, 4 и 5 является

Теорема 6 *. *В пространстве* $E = \oplus E_i$, *где* $E_i \in R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ —

* Эта теорема была доказана мной совместно с В. П. Захарютой.

ядерные пространства Кёте, принадлежащие существенно различным (упорядоченным) риссовским классам, все базисы квазиэквивалентны. При этом $E \in \mathcal{N}_s$, если $R_i = K(E_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Ростовский государственный университет

Поступило 22 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Драгилев, В. П. Захарюта, М. Г. Хапланов, О некоторых проблемах базиса аналитических функций, Ростов, 1967. [2] В. П. Захарюта, Функциональн. анализ, 4, в. 2 (1970). [3] М. М. Драгилев, Тезисы докл. IV Всесоюзн. конф. по теории функций комплексн. перемен., 1958, М., 1961. [4] М. М. Драгилев, УМН, 15, в. 2 (92) (1960). [5] Б. С. Митягин, ДАН, 137, № 3 (1961). [6] Б. С. Митягин, УМН, 16, в. 4 (100) (1961). [7] М. М. Драгилев, Матем. сборн., 68, в. 2 (1965). [8] C. Bessaga, Studia Mathem., 31 (1968). [9] В. П. Захарюта, ДАН, 180, № 4 (1968). [10] Ю. Ф. Коробейник, Сборн. студенческ. работ Ростовск. гос. унив., 1957. [11] А. Робертсон, В. Робертсон, Топологические векторные пространства, М., 1967. [12] A. Dynin, B. Mitiagin, Bull. Acad. Pol. Sci., 8, № 8 (1960).