Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 517.947

МАТЕМАТИКА

А. А. АРСЕНЬЕВ

О ПОВЕДЕНИИ ЭНЕРГИИ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 3 II 1970)

1. Пусть R_N — N-мерное эвклидово пространство, $N \geqslant 3$, Ω — открытая область в R_N с границей класса $A^{(1,\alpha)}$, $\alpha > 0$. Мы будем предполагать, что Ω содержит внешность некоторого шара. В цилиндре $\Omega \times [0, \infty)$ рассмотрим смешанную задачу

$$\partial^2 v / \partial t^2 - \Delta v = F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad v(x, t) \in \mathring{W}_2^1(\Omega),$$
$$v(x, +0) = v_t(x, +0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Пусть $v(x, t)$ — решение задачи (1); назовем энергией $E(t)$ интеграл

$$E(t) = \int_\Omega (|v_t(x, t)|^2 + |\nabla_x v(x, t)|^2)\, dx.$$

Основной результат этой работы сформулирован в теоремах 1 и 2; он состоит в вычислении асимптотики функции $E(t)$ при $t \to \infty$ для некоторых почти периодических функций $F(x, t)$.

2. Пусть $u(x, k)$ — решение задачи рассеяния для области $R_N \setminus \Omega$:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad \lambda = k^2, \quad k \in R_N, \quad u(x, k) \in L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$
$$u(x, k) = 0, \quad x \in \text{гр}\,\Omega, \quad u(x, k) = \exp(ikx) + \varphi(x, k),$$
$$\varphi(x, k) = O(|x|^{(1-N)/2}), \quad \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda}\right)\varphi(x, k) = o(|x|^{(1-N)/2}), \quad |x| \to \infty.$$

Существование и нужные нам свойства функций $u(x, k)$ доказаны, например, в работе (1).

Отметим также весьма просто доказываемую лемму:

Лемма 1. *При $x \in \Omega$ и $\beta > N/2$ справедливо неравенство*

$$\int (1 + k^2)^{-\beta} |u(x, k)|^2\, dk \leqslant (\pi)^{N/2} \Gamma(\beta)^{-1} \Gamma\left(\beta - \frac{N}{2}\right).$$

3. Пусть $F(x, t) \in L^2(\Omega)$ при всех $t \geqslant 0$. Положим

$$\hat{F}(k, t) = \lim_{R \to \infty} \int_{|x| \leqslant R} u(x, k) F(x, t)\, dx. \tag{2}$$

(Существование в метрике L^2 предела (2) доказано в (1).)

Лемма 2. *Если $F(x, t)$ непрерывна по t в метрике $L^2(\Omega)$, то решение $v(x, t)$ задачи (1) существует, и его энергия $E(t)$ может быть вычислена по формуле*

$$E(t) = (2\pi)^{-N} \int \left[\left| \int_0^t \hat{F}(k, \tau) \sin|k|(t - \tau)\, d\tau \right|^2 + \left| \int_0^t \hat{F}(k, \tau) \cos|k|(t - \tau)\, d\tau \right|^2 \right] dk. \tag{3}$$

Доказательство. Символом $\langle f, g\rangle$ обозначим скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Заметим, что (3) достаточно доказать для непрерывных по t функций $F(x, t)$ из $C_0^\infty(\Omega)$ (ибо они плотны в $L^2(\Omega)$). Для таких функций $F(x, t)$ в (1) справедливо равенство:

$$E(t) = \langle v_t, v_t\rangle + \langle \nabla_x v, \nabla_x v\rangle = \langle v_t, v_t\rangle - \langle \nabla_x^2 v, v\rangle = \\ = \langle v_t, v_t\rangle + \langle F(, t) - v_{tt}, v\rangle. \tag{4}$$

Но

$$v(x, t) = (2\pi)^{-N}\int u^*(x,k)\left[\int_0^t |k|^{-1}\sin|k|(t-\tau)\tilde{F}(k,\tau)\,d\tau\right]dk. \tag{5}$$

В силу леммы ([1]) производные по t от функции $v(x, t)$ можно вычислить дифференцированием (5) под знаком интеграла; подставив их в (4) и воспользовавшись равенством Парсеваля

$$\langle f, g\rangle = (2\pi)^{-N}\int \hat{f}(k)^*\hat{g}(k)\,dk,$$

мы получим (3).

4. Пусть ω_n, $n = 1, \ldots,$ — действительные числа, $\omega_n \neq 0$,

$$\alpha_n(t, r) = \int_0^t \exp(i\omega_n\tau)\sin r(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\beta_n(t, r) = \int_1^t \exp(i\omega_n\tau)\cos r(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma_{nm}(t, r) = \alpha_n(t, r)\alpha_m^*(t, r) + \beta_n(t, r)\beta_m^*(t, r).$$

Лемма 3. 1) *Если* $\omega_n \neq \omega_m$ *и* $\varphi(r) \in L^1(0, \infty)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^\infty \gamma_{nm}(t, r)\varphi(r)\,dr = 0.$$

2) *Если* $|\omega_n|$ — *точка Лебега функции* $\varphi(r) \in L^1(0, \infty)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^\infty \gamma_{nn}(t, r)\varphi(r)\,dr = \pi\varphi(|\omega_n|).$$

Заметим также, что если $f(x) \in L^2(\Omega)$, то для почти всех $r > 0$ определена функция

$$\theta(f)(r) = \int_{|n|=1} |\hat{f}(nr)|^2 r^{N-1}dn,$$

причем

$$\int_0^\infty \theta(f)(r)\,dr = \int |\hat{f}(k)|^2\,dk = (2\pi)^N\int |f(x)|^2\,dx.$$

5. Теперь рассмотрим поведение энергии $E(t)$ в нескольких типичных случаях. Пусть $W(t) = E(t)/t$. Положим в (1)

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^M f_n(x)\exp(i\omega_n t). \tag{6}$$

Теорема 1. *Если*: 1) *каждая из функций* $f_n(x) \in L^2(\Omega)$; 2) $\forall n$: $\omega_n \neq 0$ *и* $|\omega_n|$ *есть точка Лебега функции* $\theta(f)(r)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = (2\pi)^{-N}\pi\sum_{n=1}^M \theta(f_n)(|\omega_n|).$$

Пусть

$$F(x, t) = f(x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(i\omega_n t). \tag{7}$$

Теорема 2. *Если $f(x) \in L^1 \cap L^2$, ряд Σa_n сходится абсолютно и выполнено хотя бы одно из двух условий:* 1) *все числа ω_n удовлетворяют неравенству*

$$0 < a < |\omega_n| < b < \infty;$$

2) *существует такая не зависящая от x и k константа $C < \infty$, что*

$$|u(x, k)| < C, \quad x \in \operatorname{supp} f(x), \quad k \in R_N,$$

то

$$\lim_{t \to \infty} W(t) = (2\pi)^{-N} \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \theta(f)(|\omega_n|).$$

Теоремы 1 и 2 доказываются одинаково: достаточно подставить (6) и (7) в (3) и воспользоваться леммой 3.

Физический смысл величины $\theta(f)(\omega)$ поясняет следующая

Лемма 4. *Если $F(x, t) = f(x) \exp(i\omega t)$, $f(x) \in L^2(\Omega)$, носитель $f(x)$ компактен и лежит в Ω, то*

$$\lim_{t \to \infty} (E(t + \Delta t) - E(t)) = (2\pi)^{-N} \pi \theta(f)(|\omega|) \Delta t.$$

Теоремы 1 и 2 можно рассматривать как утверждения о существовании средней предельной мощности у почти периодического источника колебаний, и в этом их аналогия с известным принципом предельной амплитуды (2).

Автор глубоко благодарен участникам семинара В. А. Ильина и А. А. Самарскому за обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. A. Shenk II, Arch. Rat. Mech. and Anal., 21, № 2, 121 (1966). [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ЖЭТФ, 18, № 2, 243 (1948).