Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

УДК 517.919 *МАТЕМАТИКА*

Г. А. ЛЕОНОВ

О НЕОБХОДИМОСТИ ЧАСТОТНОГО УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 I 1970)

В настоящее время имеется много работ, в которых получены достаточные частотные условия абсолютной устойчивости [1] нелинейных регулируемых систем. Как указано в обзоре [2], одной из основных проблем является вопрос о необходимости этих условий для абсолютной устойчивости. В предлагаемой статье выделен класс систем, для которых полученный В. А. Якубовичем [3] частотный критерий является не только достаточным, но и необходимым условием абсолютной устойчивости.

Рассмотрим систему

$$dx / dt = Ax + q\varphi(\sigma), \quad \sigma = (r, x), \tag{1}$$

где q, r — постоянные n-мерные векторы, A — постоянная $n \times n$-матрица, $\varphi(\sigma)$ — непрерывная скалярная функция. Матрица A имеет два чисто мнимых собственных значения $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$), остальные собственные значения (если $n > 2$) имеют отрицательные вещественные части.

Введем передаточную функцию $\chi(\lambda) = (r, (A - \lambda I)^{-1} q)$, где λ — комплексная переменная, I — единичная $n \times n$-матрица, и введем обозначения

$$\alpha = \frac{1}{\omega_0} \lim_{\omega \to \omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2) \operatorname{Im} \chi(i\omega), \quad \beta = \lim_{\omega \to \omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2) \operatorname{Re} \chi(i\omega),$$

$$\pi(\omega) = \operatorname{Re}\left[(1 + i\omega\beta / \alpha\omega_0^2)\chi(i\omega)\right], \quad \pi_\infty = \lim_{\omega \to \infty} \pi(\omega),$$

$$\varkappa = -\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \chi(\lambda).$$

В этих обозначениях ω — вещественная переменная. На значение ω_0 функция $\pi(\omega)$ распространяется по непрерывности.

Предположим, что выполнены условия:

$$0 < \varphi(\sigma) / \sigma \leqslant \mu \quad \text{при } \sigma \neq 0, \tag{2}$$

$$\alpha > 0, \quad \beta\varkappa > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^2 (\pi(\omega) - \pi_\infty) > 0, \quad \pi(\omega) > \pi_\infty \quad \text{при всех } \omega \geqslant 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда для абсолютной устойчивости системы* (1) *в классе нелинейностей, удовлетворяющих условию* (2), *необходимо и достаточно выполнение частотного условия*

$$\pi(\omega) + 1 / \mu > 0 \tag{5}$$

для всех $\omega \geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3). *Тогда для абсолютной устойчивости системы* (1) *в классе нелинейностей, удовлетворяющих условию* (2), *необходимо, чтобы выполнялось неравенство* $\mu \leqslant \alpha\omega_0^2 / \beta\varkappa$.

Отметим, что результат, сформулированный в теореме 2, для случая $n = 3$ содержится в монографии В. А. Плисса [4].

Пусть числа h, H, δ, ε подчиняются неравенствам $H \geqslant h > \alpha\omega_0^2 / \beta\varkappa$, $0 < \delta < \varepsilon < \delta + \delta^4$. Обозначим через $E(h, H, \delta)$ класс функций $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$h\sigma^2 \leqslant \varphi(\sigma)\sigma \leqslant H\sigma^2 \quad \text{при } |\sigma| \leqslant \delta,$$

$$0 < \varphi(\sigma)\sigma \leqslant H\sigma^2 \quad \text{при } \delta \leqslant |\sigma| \leqslant \varepsilon, \quad \varphi(\sigma) = \delta^4 \quad \text{при } \sigma \geqslant \varepsilon,$$

$$\varphi(\sigma) = -\delta^4 \quad \text{при } \sigma \leqslant -\varepsilon.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3) *и* $\varphi(\sigma) \in E(h, H, \delta)$, *где* δ — *достаточно малое по сравнению с нормами* $\|A\|$, $\|q\|$, $\|r\|$ *число. Тогда существует траектория системы* (1), *не стремящаяся к началу координат при* $t \to +\infty$. *Если, кроме того, выполнено условие* (4), *то система* (1) *имеет периодическое решение, отличное от состояния равновесия.*

Следствие 1. *Теорема* 1 *справедлива, если неравенство* (2) *заменить на условие* $\varepsilon_0 \leqslant \varphi(\sigma) / \sigma \leqslant \mu$, *где* ε_0 — *достаточно малое положительное число* *.

Следствие 2. *Для любого* $n > 2$ *существует вполне управляемая и вполне наблюдаемая система вида* (1) *с нелинейностью, удовлетворяющей обобщенным условиям Гурвица, имеющая периодическое решение, отличное от состояния равновесия.*

Для $n = 3$ этот факт установлен В. А. Плиссом [4].

При доказательстве сформулированных теорем, не умаляя общности, будем считать, что матрица A имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & B \end{array}\right),$$

где B — гурвицева матрица такая, что система $dy / dt = By$ имеет функцию Ляпунова ** $W(y) = \sum\limits_{i=1}^{n-2} y_i^2$. Тогда $\varkappa = (r, q)$, $\alpha = -(r_1 q_1 + r_2 q_2)$, $\beta = (r_1 q_2 - r_2 q_1)\omega_0$. Для определенности будем считать, что $r_2 \neq 0$ (при $r_1 \neq 0$ рассуждения аналогичны).

Введем обозначения:

$$\gamma = r_1^2 + r_2^2, \quad V(x) = (x_1 q_1 + x_2 q_2) + \alpha(r, x)/\gamma,$$

$$U(x) = (A^* r, x), \quad w(x) = [x_1^2 + x_2^2]/2,$$

$$\Omega_1 = \left\{x \,|\, (r, x) = 0, \ \sum_{i=3}^{n} x_i^2 < \delta^3, \ w(x) > 1\right\},$$

$$\Omega_2 = \{x \,|\, x \in \Omega_1, \ r_2 x_1 > 0\}.$$

Пусть $p \in \Omega_2$; $x(t, p)$ — решение системы (1) на интервале времени $[0, +\infty)$ с начальными данными $x(0, p) = p$; $t_{i,p}$ $(i = 1, 2)$ — i-й момент

---

* М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер показали [1], что частотный критерий В. А. Якубовича (5), установленный для случая двух чисто мнимых корней, формально совпадает с частотным условием В. М. Попова (установленным для случая, когда A — гурвицева матрица). Именно, в [1] показано, что в этом случае варьируемый параметр в критерии В. М. Попова однозначно определяется и критерий В. М. Попова принимает вид (5). Аналогично можно показать, что условие (5) является необходимым и достаточным условием существования параметра в критерии В. М. Попова для класса нелинейностей $\varepsilon_0 \leqslant \varphi(\sigma) / \sigma \leqslant \mu$, где ε_0 — достаточно малое число, если выполнены условия (4). Поэтому следствие 1 выделяет классы систем (к сожалению, не эффективно), для которых частотное условие В. М. Попова является не только достаточным, но и необходимым условием абсолютной устойчивости. При этом выделяются и такие классы систем, для которых гурвицев сектор не совпадает с сектором абсолютной устойчивости.

** Если вектор обозначен символом a, то под символом a_i понимается его i-я компонента. В частности, через x_i, y_i, z_i, p_i обозначены компоненты векторов x, y, z, p.

пересечения траектории $x(t, p)$ с гиперплоскостью $\sigma = 0$; $\tau_{i,p}$ $(i = 1, 2)$ — i-й момент пересечения траектории $x(t, p)$ с гиперплоскостью $\sigma = \varepsilon$. Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 1. $dV(x) / dt = O(\delta^{3/2})$, $dU(x) / dt = O(\delta^{3/2})$ *при* $x \in \Omega_1$.

Лемма 2. *При достаточно малом* δ *на интервалах времени* $[0, \tau_{1,p}]$ *и* $[\tau_{2,p}, t_{1,p}]$ *решение* $x(t, p)$ *можно рассматривать как функцию от* σ.

Лемма 3. $\tau_{1,p} = O(\delta)$, $t_{1,p} - \tau_{2,p} = O(\delta)$.

Лемма 4. *При достаточно малом* δ *на интервале времени* $[\pi / 2\omega_0, t_{2,p}]$ *справедлива оценка* $\sum_{i=3}^{n} x_i^2(t, p) < \delta^3$.

Лемма 5. $dV(x) / d\sigma = O(\delta^{3/2})$, $dU(x) / d\sigma = O(\delta^{3/2})$ *при* $x \in \Omega_1$.

Лемма 6. *На интервале времени* $[0, \tau_{1,p}]$ *справедлива оценка*

$$V(x(\sigma, p)) = V(p) + O(\delta^{3/2}), \quad U(x(\sigma, p)) = U(p) + O(\delta^{3/2}).$$

На интервале времени $[\tau_{2,p}, t_{1,p}]$ *справедлива оценка*

$$V(x(\sigma, p)) = -V(p) + O(\delta^{3/2}), \quad U(x(\sigma, p)) = -U(p) + O(\delta^{3/2}).$$

Лемма 7.

$$V(p) = -\beta z_1 / r_2\omega_0 + O(\delta^{3/2}), \quad U(p) = \gamma z_1\omega_0 / r_2 + O(\delta^{3/2}),$$

где z — *некоторый элемент множества* $\{z \mid z \in \Omega_2,\ z_3 = \ldots = z_n = 0\}$.

Доказательство теоремы 3. При доказательстве теоремы используются некоторые идеи В. А. Плисса, изложенные в работе (4).

Поставим в соответствие точке $p \in \Omega_2$ точку $x(t_{2,p}, p)$. Обозначим полученное таким образом преобразование Ω_2 через T. Докажем, что $T\Omega_2 \subset \subset \Omega_2$. Из леммы 4 и условий, определяющих класс $E(h, H, \delta)$, вытекает, что для доказательства этого включения достаточно показать, что $w(p) < w(x(t_{2,p}, p))$ при $|p_1| \leqslant N$, где N — некоторое достаточно большое по сравнению с нормами $\|A\|$, $\|q\|$, $\|r\|$ число.

Сначала оценим приращение функции w вдоль траектории $x(t, p)$ при прохождении последней полосы $0 \leqslant \sigma \leqslant \varepsilon$. Для этого будем рассматривать функцию w на траектории $x(t, p)$ при $t \in [0, \tau_{1,p}]$ и при $t \in [\tau_{2,p}, t_{1,p}]$ как функцию от σ. При этом возникает неоднозначность, так как траектория $x(t, p)$ проходит полосу $0 \leqslant \sigma \leqslant \varepsilon$ два раза. Чтобы избежать этой неоднозначности, будем на промежутке $[0, \tau_{1,p}]$ снабжать w значком плюс, на $[\tau_{2,p}, t_{1,p}]$ — значком минус.

Рассмотрим равенство

$$dw / d\sigma = [x_1q_1 + x_2q_2]\varphi(\sigma) / (A^*r, x) + (r, q)\varphi(\sigma).$$

Из этой формулы и оценок леммы 6, находим

$$\frac{dw_+}{d\sigma} - \frac{dw_-}{d\sigma} = 2\varphi(\sigma)\frac{\alpha U(p)\sigma/\gamma + \varkappa V(p)\varphi(\sigma) + O(\delta^{3/2})}{[\varkappa\varphi(\sigma) + O(\delta^{3/2})]^2 - [U(p)]^2}.$$

Воспользовавшись леммой 7, получим

$$\frac{dw_+}{d\sigma} - \frac{dw_-}{d\sigma} = 2\varphi(\sigma)\frac{r_2z_1[-\alpha\omega_0^2 + \beta\varkappa\varphi(\sigma)] + O(\delta^{3/2})}{\omega_0^3\gamma^2z_1^2 + O(\delta^{3/2})}.$$

Из неравенства $w(z) > 1$ следует соотношение $z_1^2 > r_2^2 / \gamma$. Отсюда получаем оценку

$$w(x(t_{1,p}, p)) - w(x(\tau_{2,p}, p)) + w(x(\tau_{1,p}, p)) - w(p) =$$
$$= \int_0^\delta [dw_+/d\sigma - dw_-/d\sigma]\,d\sigma + \int_\delta^\varepsilon [dw_+/d\sigma - dw_-/d\sigma]\,d\sigma >$$
$$> [-\alpha\omega_0^2 + \beta\varkappa h]\,\delta^3 r_2 h/3z_1\gamma^2\omega_0^3 + O(\delta^4).$$

Из условий, определяющих класс $E(h, H, \delta)$, вытекает, что $w(x(\tau_{2,p}, p)) - w(x(\tau_{1,p}, p)) = O(\delta^4)$. Отсюда $w(x(t_{1,p}, p)) - w(p) > 0$. Продолжая эти же рассуждения далее при $t \in [t_{1,p}, t_{2,p}]$, докажем неравенство $w(x(t_{2,p}, p)) - w(p) > 0$.

Из включения $T\Omega_2 \subset \Omega_2$ следует существование решения, не стремящегося к нулю при $t \to +\infty$.

Докажем существование периодического решения. Из результатов В. А. Якубовича ((3), стр. 610) следует, что при выполнении условий (3), (4) существует такая симметричная положительно определенная $n \times n$-матрица M, что производная в силу системы (1) от функции $v(x) = $

$$= x^*Mx + (\beta / \alpha\omega_0^2) \int\limits_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma - \sigma^2 / 2\varkappa \text{ удовлетворяет оценке } dv(x) / dt \leqslant$$

$\leqslant -[\sigma - (\beta\varkappa / \alpha\omega_0^2)\varphi(\sigma)]\varphi(\sigma)$.

Возьмем число δ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon > 2\delta^4\varkappa\beta / \alpha\omega_0^2$, а число v_0 столь большим, чтобы при $v(p) = v_0$ выполнялась оценка $H^2\varepsilon(\tau_{1,p} + t_{1,p} - \tau_{2,p})\beta\varkappa / \alpha\omega_0^2 < \delta^4(\tau_{2,p} - \tau_{1,p}) / 2$.

Из условий, определяющих класс $E(h, H, \delta)$, следует, что на траектории $x(t, p)$ при $t \in [0, \tau_{1,p}]$ и при $t \in [\tau_{2,p}, t_{1,p}]$ выполнено неравенство $dv(x) / dt < H^2\varepsilon^2\beta\varkappa / \alpha\omega_0^2$, а при $t \in [\tau_{1,p}, \tau_{2,p}]$ справедлива оценка $dv(x) / dt < -\delta^4\varepsilon / 2$. Отсюда следует, что $v(x(t_{1,p}, p)) - v(p) < -\delta^4\varepsilon(\tau_{2,p} - \tau_{1,p}) / 2 + H^2\varepsilon^2(\tau_{1,p} + t_{1,p} - \tau_{2,p})\beta\varkappa / \alpha\omega_0^2 < 0$.

Продолжая эти же рассуждения далее при $t \in [t_{1,p}, t_{2,p}]$, докажем неравенство $v(x(t_{2,p}, p)) - v(p) < 0$. Из последнего неравенства следует, что* $T\bar{Q} \subset Q$, где $Q = \{x \mid x \in \Omega_2, v(x) < v_0\}$. Отсюда, в силу известной теоремы Брауера, в области Q существует точка, неподвижная относительно преобразования T. Это и доказывает существование периодического движения системы (1).

Теорема 2 непосредственно следует из теоремы 3. Действительно, если $\mu > \alpha\omega_0^2 / \beta\varkappa$, то существует функция $\varphi(\sigma) \in E(h, H, \delta)$, удовлетворяющая условию (2) (нужно взять числа h и H так, чтобы $\alpha\omega_0^2 / \beta\varkappa < h \leqslant H < \mu$).

Необходимость условия (5) в теореме 1 следует из теоремы 2. Действительно, пусть в некоторой точке ω^* выполнено неравенство $\pi(\omega^*) + 1 / \mu \leqslant 0$. Тогда из условий (4) получим, что $\pi_\infty + 1 / \mu < 0$. Но $\pi_\infty = -\beta\varkappa / \alpha\omega_0^2$. Отсюда $\mu > \alpha\omega_0^2 / \beta\varkappa$. Достаточность условия (5) следует из результатов В. А. Якубовича, опубликованных в работе (3) (следствие к теореме 2).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд. АН СССР, 1963. [2] Е. С. Пятницкий, Автоматика и телемеханика, № 6, 5 (1968). [3] В. А. Якубович, Там же, 25, № 5, 601 (1964). [4] В. А. Плисс, Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Л., 1958.

* Через $\bar{Q}$ обозначим замыкание Q.