Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

И. И. БАВРИН

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛ КОШИ, ШВАРЦА И ПУАССОНА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 6 III 1970)

М. М. Джрбашяном (1) были установлены обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированные с данной функцией $\omega(x) \in \Omega$. Вслед затем автором (2) были получены обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированные с данной системой функций $\omega_j(x) \in \Omega$ $(j = 1, \ldots, m)$. В настоящей заметке дается (теоремы 1 и 2) существенное обобщение этих последних формул.

1. Пусть функции $\omega_j(x) \in \Omega$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, $\widetilde{\omega}_{\tilde{j}}(x) \in \Omega$ $(\tilde{j} = 1, 2, \ldots, \widetilde{m})$. Пусть, далее,

$$p_j(0) = 1, \quad \widetilde{p}_{\tilde{j}}(0) = 1,$$

$$p_j(r) = r\int_r^1 \frac{\omega_j(x)}{x^2}\,dx, \quad \widetilde{p}_{\tilde{j}}(r) = r\int_r^1 \frac{\widetilde{\omega}_{\tilde{j}}(x)}{x^2}\,dx \quad (r \in (0, 1]),$$

$$\Delta_0^{(j)} = 1, \quad \widetilde{\Delta}_0^{(\tilde{j})} = 1, \quad \Delta_k^{(j)} = -(k+1)\int_0^1 r^k dp_j(r) = k\int_0^1 r^{k-1}\omega_j(r)\,dr,$$

$$\widetilde{\Delta}_k^{(\tilde{j})} = -(k+1)\int_0^1 r^k d\widetilde{p}_{\tilde{j}}(r) = k\int_0^1 r^{k-1}\widetilde{\omega}_{\tilde{j}}(r)\,dr$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m; \quad \tilde{j} = 1, 2, \ldots, \widetilde{m}), \quad k = 1, 2, \ldots\,^*.$$

2. Автором (2) введена в рассмотрение функция

$$C(z; \omega_1, \ldots, \omega_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k^{(1)} \ldots \Delta_k^{(m)}},$$

являющаяся голоморфной в круге $|z| < 1$. Поэтому, в силу теоремы 1 из (2), функция

$$L^{(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_{\widetilde{m}})}\,[C(re^{i\varphi}; \omega_1, \ldots, \omega_m)] \equiv C_{(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_{\widetilde{m}})}(re^{i\varphi}; \omega_1, \ldots, \omega_m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\Delta}_k^{(1)} \ldots \widetilde{\Delta}_k^{(\widetilde{m})}}{\Delta_k^{(1)} \ldots \Delta_k^{(m)}} (re^{i\varphi})^k, \tag{1}$$

---

* В (1) введена функция $p(r) = r\int_r^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx$ $(\omega(x) \in \Omega)$, $r \in (0, 1)$, $p(0) = 1$, и последовательность чисел $\Delta_k = -(k+1)\int_0^1 r^k\,dp(r)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, при этом показано, что все числа Δ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ положительны, причем $\Delta_0 = 1$, $\Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)\,x^{k-1}\,dx$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

которую для краткости обозначим через $C_{(\widetilde{\omega})}(re^{i\varphi};\ \omega)$ $(\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)$, $\widetilde{\omega}=(\widetilde{\omega}_1,\ldots,\widetilde{\omega}_{\widetilde{m}})$, так и всюду ниже), голоморфна в круге $|z|<1$.

Введем функцию

$$S_{(\widetilde{\omega})}(z;\omega)=2C_{(\widetilde{\omega})}(z;\omega)-C_{(\widetilde{\omega})}(0;\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\Delta}_k^{(1)}\ldots\widetilde{\Delta}_k^{(\widetilde{m})}}{\Delta_k^{(1)}\ldots\Delta_k^{(m)}}z^k, \qquad (2)$$

заметив, что $C_{(\widetilde{\omega})}(0;\omega)=\widetilde{\Delta}_0^{(1)}\ldots\widetilde{\Delta}_0^{(\widetilde{m})}/\Delta_0^{(1)}\ldots\Delta_0^{(m)}=1$.

Пусть функция $f(re^{i\varphi})=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(re^{i\varphi})^k$ голоморфна в круге $|z|<R$. Тогда ([2], теорема 1) функция

$$L^{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}[f(re^{i\varphi})]\equiv f_{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}(re^{i\varphi})=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k^{(1)}\ldots\Delta_k^{(m)}a_k(re^{i\varphi})^k$$

голоморфна в том же круге $|z|<R$. Отсюда следует, что функция

$$f_{(\omega)}(z;\widetilde{\omega})=f_{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}(z;\widetilde{\omega}_1,\ldots,\widetilde{\omega}_{\widetilde{m}})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_k^{(1)}\ldots\Delta_k^{(m)}}{\widetilde{\Delta}_k^{(1)}\ldots\widetilde{\Delta}_k^{(\widetilde{m})}}a_kz^k \qquad (3)$$

также голоморфна в круге $|z|<R$ *. Наконец, опираясь на разложения (1) — (3), приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если функция $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ голоморфна в круге $|z|<R$, то для любого ρ $(0<\rho<R)$ справедливы интегральные формулы*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\ \omega\right)f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\widetilde{\omega})\,d\theta \quad (|z|<\rho),$$

$$f(z)=i\,\mathrm{Im}\,f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\ \omega\right)\mathrm{Re}\,f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\widetilde{\omega})\,d\theta \quad (|z|<\rho).$$

3. Введем функцию

$$P_{(\widetilde{\omega})}(\theta,r;\omega)=\mathrm{Re}\,S_{(\widetilde{\omega})}(re^{i\theta};\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\Delta}_k^{(1)}\ldots\widetilde{\Delta}_k^{(\widetilde{m})}}{\Delta_k^{(1)}\ldots\Delta_k^{(m)}}r^k\cos k\theta,$$

гармоническую в единичном круге $0\leqslant r<1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Пусть функция

$$u(re^{i\varphi})=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi-\beta_k\sin k\varphi)r^k$$

(α_0, α_k, β_k $(k=1,2,\ldots)$ — действительные числа **) гармоническая в круге $|z|<R$. Тогда, в силу теоремы автора (теорема 2 из [2]), функция

$$L^{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}[u(re^{i\varphi})]\equiv u_{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}(re^{i\varphi})=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta_k^{(1)}\ldots\Delta_k^{(m)}\alpha_k\cos k\varphi-$$
$$-\Delta_k^{(1)}\ldots\Delta_k^{(m)}\beta_k\sin k\varphi)r^k$$

---

* Используется формула Коши — Адамара.

** Такими они остаются и в дальнейшем.

будет гармонической в том же круге $|z| < R$. Отсюда следует, что функция

$$u_{(\omega)}(re^{i\varphi}; \widetilde{\omega}) = u_{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}(re^{i\varphi}; \widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_{\widetilde{m}}) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta_k^{(1)} \ldots \Delta_k^{(m)}}{\widetilde{\Delta}_k^{(1)} \ldots \widetilde{\Delta}_k^{(\widetilde{m})}} \alpha_k \cos k\varphi - \frac{\Delta_k^{(1)} \ldots \Delta_k^{(m)}}{\widetilde{\Delta}_k^{(1)} \ldots \widetilde{\Delta}_k^{(\widetilde{m})}} \beta_k \sin k\varphi \right) r^k$$

также гармоническая в круге $|z| < R$ *. Теперь из теоремы 1 легко вытекает

Теорема 2. *Если функция*

$$u(re^{i\varphi}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi - \beta_k \sin k\varphi) r^k$$

гармоническая в круге $|z| < R$, *то для любого* ρ $(0 < \rho < R)$ *справедлива интегральная формула*

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{(\widetilde{\omega})} \left(\varphi - \theta, \frac{r}{\rho}; \omega \right) u_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})\, d\theta$$

$$(0 \leqslant r < \rho, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
5 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 5, 1075 (1968). [2] И. И. Баврин, ДАН, 187, № 3 (1969).

* Используется формула Коши — Адамара.