Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 1

УДК 517.512.6 *МАТЕМАТИКА*

Д. Л. БЕРМАН

О ВСЮДУ РАСХОДЯЩИХСЯ РАСШИРЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ ЭРМИТА — ФЕЙЕРА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 29 XII 1969)

1⁰. Введение.

В 1916 г. Л. Фейер ([1]) доказал следующую важную теорему.

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная в сегменте $[-1, 1]$ функция и $H_n(f, x)$ — многочлен степени $(2n-1)$, однозначно определяющийся из условий

$$H_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad H_n'(f, x_k^{(n)}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi. \tag{1}$$

Тогда имеет место равномерно в $[-1, 1]$ соотношение

$$H_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим теперь так называемый расширенный интерполяционный полином Эрмита — Фейера $F_n(f, x)$ степени $(2n+3)$, который однозначно определяется из равенств

$$F_n(f, 1) = f(1), \quad F_n(f, -1) = f(-1), \quad F_n'(f, 1) = 0, \tag{2}$$
$$F_n'(f, -1) = 0, \quad F_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad F_n'(f, x_k^{(n)}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ — узлы Чебышева (1). В ([2,3]) доказано, что процесс, построенный даже для такой простой функции, как $|x|$, расходится при $x=0$. Поскольку матрица узлов процесса $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ получается расширением матрицы узлов процесса $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ добавлением в качестве узлов точек ± 1, то этот результат, в силу упомянутой теоремы Л. Фейера, является неожиданным. Ослабим теперь условия (2), а именно, рассмотрим полином $A_n(f)$ степени $(2n+2)$, который однозначно определяется из равенств

$$A_n(f, 1) = f(1), \quad A_n(f, -1) = f(-1), \quad A_n'(f, 1) = 0,$$
$$A_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \tag{3}$$
$$A_n'(f, x_k^{(n)}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $x_k^{(n)}$ — по-прежнему узлы (1). Полиномы A_n в некотором смысле ближе к полиномам H_n, чем полиномы F_n. Поэтому вопрос о том, будет ли процесс $\{A_n(f)\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходиться для каждой непрерывной в $[-1, 1]$ функции, имеет определенный интерес. Недавно Р. Б. Саксена ([4]) с помощью результатов из ([3]) просто доказал, что процесс $\{A_n(f)\}_{n=1}^\infty$ расходится при $x=0$, если $f(x) = |x|$. Таким образом, здесь имеет место та же ситуация, что в случае процесса $\{F_n(f)\}_{n=1}^\infty$.

В связи с изложенным возникают следующие вопросы:

1. Существует ли такая непрерывная в $[-1, 1]$ функция, для которой процесс $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ расходится во всех точках $(-1, 1)$?

2. Существует ли такая непрерывная в $[-1, 1]$ функция, для которой процесс $\{F_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ расходится во всех точках $(-1, 1)$?

В этой заметке рассматривается лишь первый вопрос. Второй вопрос решается аналогичным образом.

2[0]. Формулировки и доказательства теорем.

Теорема 1. *Интерполяционный процесс* $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, *построенный при узлах* (1) *для* $f(x) = 1 - x^2$, *расходится во всех точках интервала* $(-1, 1)$.

Доказательство. Нам нужна

Лемма. *Для любого* $\theta \in [0, \pi/2]$ *можно найти такую последовательность натуральных чисел* $n_1 < n_2 < \ldots, n_k \to \infty$, $k \to \infty$, *что выполняется равенство* $\lim\limits_{k\to\infty} \sin^2 n_k\theta = 0$.

Полином $A_n(f, x)$, однозначно определяющийся из условий (2), имеет вид

$$A_n(f, x) = \left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 f(-1) + \frac{1+x}{2}\left\{1 + \frac{4n^2+1}{2}(1-x)\right\} f(1)\right] T_n^2(x) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \frac{(1-x^2)(1-x)}{(1-x_\nu^2)(1-x_\nu)} \frac{(1-x_\nu^2) + (1+2x_\nu)(x-x_\nu)}{n^2(x-x_\nu)^2} T_n^2(x),$$

$$T_n(x) = \cos n \arccos x. \tag{4}$$

Поэтому при $f(x) = 1 - x^2$ имеем:

$$A_n(f, x) = \frac{(1-x^2)(1-x) T_n^2(x)}{n^2}\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1+x_\nu}{(x-x_\nu)^2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1+2x_\nu}{(1-x_\nu)(x-x_\nu)}\right]. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\frac{1+2x_\nu}{(1-x_\nu)(x-x_\nu)} = \frac{1+2x}{(1-x)(x-x_\nu)} + \frac{3}{(x-1)(1-x_\nu)}.$$

Следовательно, (5) можно записать в виде

$$A_n(f, x) = \frac{(1-x^2)(1-x) T_n^2(x)}{n^2}\left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(x-x_\nu)^2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x}{(x-x_\nu)^2} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x-x_\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+2x}{1-x}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x-x_\nu} + \frac{3}{x-1}\sum \frac{1}{1-x_\nu}\right]. \tag{6}$$

Известно, что

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x-x_\nu}, \quad \frac{(1-x^2) T_n^2(x)}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(x-x_\nu)^2} = 1 - \frac{\sin 2n\theta \cos\theta}{2n \sin\theta}, \quad x = \cos\theta, \tag{7}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1-x_\nu} = n^2.$$

Поэтому из (6) выводим

$$A_n(f, x) = (1-x^2) + \frac{\sin 2n\theta \sin 2\theta}{2n} - 3\sin^2\theta \cos^2 n\theta, \quad x = \cos\theta. \tag{8}$$

Рассмотрим сперва случай, когда $0 \leqslant x < 1$. Допустим, что при каком-то x из $[0, 1)$ имеет место сходимость процесса $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда в силу (8) имеем

$$\sin 2n\theta \sin 2\theta / 2n - 3\sin^2\theta \cos^2 n\theta \to 0, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Это равенство эквивалентно равенству $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 n\theta = 0$, $\theta \in (0, \pi/2]$, которое противоречит лемме. Следовательно, в $[0, 1)$ процесс расходится.

Рассмотрим теперь интервал $(-1, 0)$. Если в некоторой точке $\tilde{x} \in (-1, 0)$ процесс $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходился бы, то, согласно предыдущему, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 n\bar{\theta} = 0$ (9), где $\tilde{x} = \cos\bar{\theta}$. Положим $\theta = \pi - \bar{\theta}$, $\pi/2 < \bar{\theta} < \pi$. Стало быть, $0 < \bar{\theta} < \pi/2$. Так как

$$\cos^2 n\bar{\theta} = \cos^2 n\bar{\theta},$$

то из (9) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\bar{\theta} = 0$. Это опять противоречит лемме. Итак, процесс $\{A_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится также в интервале $(-1, 0)$. Теорема доказана.

Наряду с полиномом $A_n(f, x)$, рассмотрим полином $B_n(f, x)$, однозначно определяющийся из условий

$$B_n(f, 1) = f(1), \quad B_n(f, -1) = f(-1), \quad B_n'(f, -1) = 0,$$
$$B_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad B_n'(f, x_k^{(n)}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Почти дословным повторением рассуждений из доказательства теоремы 1 получим теорему 2.

Теорема 2. *Интерполяционный процесс* $\{B_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, *построенный при узлах Чебышева* (1) *для* $f(x) = 1 - x^2$, *расходится во всех точках интервала* $(-1, 1)$.

Следствие. *Интерполяционный процесс* $\{A_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$, *построенный при узлах Чебышева* (1) *для* $f(x) = x^2$, *расходится во всех точках интервала* $(-1, 1)$.

Действительно, при $f \equiv 1$ $A_n(f) \equiv 1$, поэтому

$$A_n(1 - z^2, x) = 1 - A_u(z^2, x). \tag{10}$$

Если бы при $x \in (-1, 1)$ $A_n(z^2, x) \to x^2$, $n \to \infty$, то, согласно (10), $A_n(1 - z^2, x) \to 1 - x^2$, $n \to \infty$, что противоречит теореме 1.

Теорема 3. *Интерполяционный процесс* $\{A_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$, *построенный при узлах Чебышева* (1) *для* $f(x) = x$, *расходится во всех точках интервала* $(-1, 1)$.

Доказательство. Так как $A_n(1, x) \equiv 1$, то, согласно (4),

$$1 - A_n(z, x) = T_n^2(x)\left[\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(1-x)(1-x^2)}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(1-x_\nu^2) + (1+2x_\nu)(x-x_\nu)}{(1-x_\nu^2)(x-x_\nu)^2}\right].$$

Отсюда после простых преобразований, получим

$$1 - A_n(z, x) = T_n^2(x)\left[\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(1-x)(1-x^2)}{n^2}\left(\frac{3}{2(x-1)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-x_\nu} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2(x+1)(1+x_\nu)} + \frac{2x+1}{1-x^2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x-x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(x-x_\nu)^2}\right)\right]. \tag{11}$$

Выражение (11) после применения тождеств (7) и тождества

$$\sum_{\nu=1}^{n} 1/(1 + x_\nu) = n^2$$

принимает вид

$$1 - A_n(z, x) = (1 - x) - \frac{(1-x)\sin 2n\theta\cos\theta}{2n\sin\theta} + \frac{3(x^2+1)\cos^2 n\theta}{2} +$$
$$+ \frac{(2x+1)(1-x)\cos n\theta\sin n\theta}{n\sin\theta}, \quad x = \cos\theta. \tag{12}$$

Если бы $A_n(z, x) \to x$, $n \to \infty$, то из (12) вытекало бы, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 n\theta = 0$, а это противоречит лемме.

Замечание. В связи с теоремами 1 и 3 любопытно, что если процесс $\{A_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ построить для $f(x)=(1-x^2)(1-x)$, то он равномерно сходится. Более того,

$$|A_n(f)-f|\leqslant 12/n, \quad |x|\leqslant 1, \quad f(x)=(1-x^2)(1-x). \tag{13}$$

Действительно, в данном случае

$$A_n(f, x)=\frac{(1-x)(1-x^2)T_n^2(x)}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{(x-x_\nu)^2}-\frac{4x+1}{x-x_\nu}-3\right).$$

Отсюда с помощью тождеств (7) получим

$$A_n(f, x)=(1-x)(1-x^2)-\frac{(1-x)\sin 2n\theta\sin 2\theta}{4n}-\frac{(4x+1)(1-x)\sin 2n\theta\sin\theta}{2n}-$$
$$-\frac{3(1-x)\cos^2 n\theta\sin^2\theta}{n}.$$

Стало быть, имеет место (13).

Ленинградское высшее инженерное морское училище
им. адмирала С. О. Макарова

Поступило
26 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Fejér, Gött. Nachr., 66 (1916). [2] Д. Л. Берман, ДАН, 163, № 3 (1965). [3] Д. Л. Берман, Изв. высш. учебн. завед., матем., № 1 (1967). [4] R. B. Saxena, Rend. Semin. Mat. Univ. e Politech. Torino, 27, 223 (1967—1968).