

УДК 539.12.01

Ю.А. ГРИШЕЧКИН, В.Н. КАПШАЙ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРНОГО В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА

Найдены приближённые аналитические и численные решения трёхмерного уравнения Логунова – Тавхелидзе для гармонического осциллятора в сферически-симметричном случае. Решения получены в импульсном и релятивистском конфигурационном представлении. Найденные волновые функции в релятивистском конфигурационном представлении имеют дополнительные нули по сравнению с волновыми функциями нерелятивистского гармонического осциллятора в координатном представлении.

Ключевые слова: квазипотенциальное уравнение, гармонический осциллятор, релятивистское конфигурационное представление, импульсное представление, задача Штурма – Лиувилля, интегральное уравнение, функция Макдональда, гипергеометрический ряд, спектр энергий, волновая функция.

Введение

Одной из основных моделей квантовой механики, допускающих точные решения, является задача о гармоническом осцилляторе [1, 2]. В рамках квазипотенциального подхода различные варианты релятивистского обобщения гармонического осциллятора также были рассмотрены [3–6]. Весьма экзотической особенностью потенциалов в таких обобщённых моделях часто является наличие в них разностного оператора в релятивистском конфигурационном представлении (РКП). В данной работе найдено приближённое решение уравнения Логунова – Тавхелидзе [7] в случае потенциала гармонического осциллятора, имеющего вид, аналогичный выражению квантовой механики [2]

$$V(r) = \omega^2 r^2, \quad (1)$$

где r – модуль радиус вектора в РКП; ω – константа связи.

Квазипотенциальные уравнения для сферически-симметричной волновой функции в импульсном представлении $\psi(E_q, p)$ системы двух скалярных частиц имеют форму [7, 8]

$$\psi(E_q, p) = -\frac{2m}{\pi} G(E_q, p) \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} V(p, k) \psi(E_q, k), \quad E_k = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (2)$$

где величина $2E_q \geq 2m$ – энергия системы; $p \geq 0$ – относительный импульс; m – масса каждой частицы; $G(E_q, p)$ – функция Грина, вид которой зависит от варианта квазипотенциального подхода, в котором было получено уравнение; $V(p, k)$ – потенциал. В случае уравнения Логунова – Тавхелидзе функция Грина имеет вид [7]

$$G(E_q, p) = (E_p^2 - E_q^2 - i0)^{-1}, \quad E_p = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (3)$$

Наряду с импульсным представлением двухчастичные квазипотенциальные уравнения могут быть также сформулированы в РКП в виде разностных или интегральных [8]. Уравнение Логунова – Тавхелидзе (1) в РКП имеет следующую интегральную форму [9, 10]:

$$\psi(r) = \int_0^\infty dr' G(\chi_q, r, r') V(r') \psi(r'), \quad (4)$$

где $\psi(r)$ – волновая функция; $G(\chi_q, r, r')$ – функция Грина; параметр $\chi_q \geq 0$ связан с энергией $2E_q$ системы как $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$; $V(r)$ – потенциал. Величины, входящие в уравнение (4), связаны с соответствующими величинами в импульсном представлении интегральным преобразова-

ем [8], которое в сферически-симметричном случае аналогично преобразованию Фурье. Для волновой функции это преобразование имеет вид

$$\psi(r) = \frac{2m}{\pi} \int_0^{\infty} d\chi \sin(\chi mr) \psi(m \operatorname{ch} \chi_q, m \operatorname{sh} \chi), \quad (5)$$

где величина $\chi \geq 0$ – быстрота, связанная с импульсом p формулой $p = m \operatorname{sh} \chi$ ($E_p = m \operatorname{ch} \chi$). Обратное преобразованию очевидно. Аналогично может быть записано преобразование в РКП функции Грина и потенциала ($k = m \operatorname{sh} \chi'$):

$$G(\chi_q, r, r') = \frac{-2m}{\pi} \int_0^{\infty} d\chi \sin(\chi mr) G(m \operatorname{ch} \chi_q, m \operatorname{sh} \chi) \sin(\chi mr'); \quad (6)$$

$$V(p, k) = \int_0^{\infty} dr \sin(\chi mr) V(r) \sin(\chi' mr). \quad (7)$$

Подстановка выражения (3) в формулу (6) и последующее вычисление интеграла даёт следующее выражение для функции Грина уравнения Логанова – Тавхелидзе в РКП [9, 10]:

$$G(\chi_q, r, r') = \frac{-i}{m \operatorname{sh} 2\chi_q} \left(\frac{\operatorname{sh} \left[\left(\frac{\pi}{2} + i\chi_q \right) m(r - r') \right]}{\operatorname{sh} \left[\pi m(r - r')/2 \right]} - \frac{\operatorname{sh} \left[\left(\frac{\pi}{2} + i\chi_q \right) m(r + r') \right]}{\operatorname{sh} \left[\pi m(r + r')/2 \right]} \right). \quad (8)$$

Вычисление нерелятивистского предела (предела при $\chi_q \rightarrow 0$ и $m \rightarrow \infty$) всех приведенных формул и уравнений приводит к соответствующим формулам и уравнениям нерелятивистской квантовой теории [2].

Задача Штурма – Лиувилля в импульсном представлении

Обсудим вначале решение уравнения Логанова – Тавхелидзе с потенциалом (1) в импульсном представлении. Подстановка выражения (1) в формулу (7) и последующее вычисление интеграла с учётом свойств преобразования Фурье дельта-функции [11] даёт следующее выражение для потенциала в импульсном представлении:

$$V(p, k) = -\frac{\pi\omega^2}{2m^3} \left(\sqrt{m^2 + p^2} \frac{d}{dp} \right)^2 \sqrt{m^2 + k^2} \delta(p - k) = -\frac{\pi\omega^2}{2m^3} \frac{d^2}{d\chi^2} \delta(\chi - \chi'). \quad (9)$$

Подставив потенциал (9) в уравнение (2) и выполнив затем интегрирование с учётом свойства второй производной дельта-функции [11], получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{d\chi^2} \psi(\chi_q, \chi) = \frac{m^4}{\omega^2} (\operatorname{ch}^2 \chi - \operatorname{ch}^2 \chi_q) \psi(\chi_q, \chi), \quad \chi \geq 0. \quad (10)$$

При этом мы также выполнили замену переменной $p = m \operatorname{sh} \chi$, параметризацию энергии $E_q = m \operatorname{ch} \chi_q$ и переобозначение волновой функции $\psi(E_q, p) \Rightarrow \psi(\chi_q, \chi)$. Дополнив уравнение (10) следующими из интегрального уравнения (2) граничными условиями

$$\psi(\chi_q, 0) = 0; \quad \psi(\chi_q, \chi) \Big|_{\chi \rightarrow \infty} \cong 0, \quad (11)$$

получим задачу Штурма – Лиувилля, решением которой являются волновые функции и спектр энергий релятивистского гармонического осциллятора. Решение уравнения (10) может быть выражено через модифицированные функции Матье [12, 13]. Однако исследование таких решений – громоздкая задача. В этой работе мы рассмотрим приближённое аналитическое решение задачи Штурма – Лиувилля, а также численное, найденное методом стрельбы [14].

Для нахождения приближённого решения выполним в уравнении (10) замену переменной $z = \omega^{-1} m^2 \operatorname{exp}(\chi)/2$ и представим его и граничные условия (11) в виде

$$\left[\left(z \frac{d}{dz} \right)^2 - z^2 + \frac{m^4}{2\omega^2} \operatorname{ch} 2\chi_q \right] \psi(\chi_q, z) = \frac{m^8 \omega^{-4}}{16z^2} \psi(\chi_q, z), \quad z \geq \omega^{-1} m^2 / 2; \quad (12)$$

$$\Psi(\chi_q, \omega^{-1}m^2/2) = 0, \quad \Psi(\chi_q, z)\Big|_{z \rightarrow \infty} \cong 0. \quad (13)$$

В уравнении (12) пренебрежём правой частью. Такое приближение оправдано, например, при больших значениях величины ω . Полученному таким образом уравнению удовлетворяют модифицированные функции Бесселя [12]. Второе из граничных условий (13) выполняется для функции Макдональда $K_{iv}(z)$, где $v = m^2/\omega\sqrt{(1/2)\text{ch } 2\chi_q}$. Учёт первого граничного условия (13) приводит к трансцендентному уравнению для величины v :

$$K_{iv}(\omega^{-1}m^2/2) = 0, \quad (14)$$

которое, фактически, является условием квантования энергии. Таким образом, приближённое решение задачи (10), (11), может быть записано в форме

$$\Psi(\chi_q^{(n)}, \chi) = C_n K_{iv_n}(\omega^{-1}m^2 \exp(\chi)/2), \quad (15)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер состояния гармонического осциллятора; C_n – константа, которая может быть найдена из условия нормировки волновой функции; v_n – корень уравнения (14), связанный с энергией $2E_q^{(n)}$ релятивистского гармонического осциллятора формулой

$$2E_q^{(n)} = \sqrt{2m^2 + (2v_n\omega/m)^2}. \quad (16)$$

Используя интегральное преобразование (5), запишем волновую функцию (15) в РКП:

$$\begin{aligned} \Psi_n(r) = & \frac{C_n}{4i} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1} s \left(\frac{4\omega}{m^2} \right)^{ismr} \Gamma\left(\frac{ismr - iv_n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{ismr + iv_n}{2}\right) + \right. \\ & + \left(\frac{4\omega}{m^2} \right)^{iv_n} \Gamma(iv_n) \sum_{s=\pm 1} \frac{1}{isv_n - imr} {}_1F_2\left(\frac{ismr - iv_n}{2}; 1 - iv_n, 1 + \frac{ismr - iv_n}{2}; \frac{m^4}{16\omega^2}\right) - \\ & \left. - \left(\frac{4\omega}{m^2} \right)^{-iv_n} \Gamma(-iv_n) \sum_{s=\pm 1} \frac{1}{isv_n + imr} {}_1F_2\left(\frac{ismr + iv_n}{2}; 1 + iv_n, 1 + \frac{ismr + iv_n}{2}; \frac{m^4}{16\omega^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, а ${}_1F_2(a; b, c; x)$ – обобщённый гипергеометрический ряд [15].

Для нахождения констант C_n мы использовали условия нормировки волновых функций в импульсном представлении и в РКП [16]

$$m \int_0^\infty d\chi \Psi^2(\chi_q^{(n)}, \chi) = 1, \quad \int_0^\infty dr \Psi_n^2(r) = 1, \quad (18)$$

аналогичные нерелятивистским. Результаты вычислений с использованием полученных в данном пункте уравнений и формул рассмотрим после изложения метода решения задачи для гармонического осциллятора в РКП.

Метод решения задачи в РКП

Обсудим теперь метод решения интегрального уравнения в РКП (4) с потенциалом (1). Решение было найдено численно методом, который мы ранее применяли для исследования резонансных состояний на основе ковариантных двухчастичных интегральных уравнений в РКП [17]. Кратко изложим суть метода. Используя квадратурные формулы, например формулу Симпсона [14], заменим интегралы в уравнении (4) интегральной суммой. В результате будет получена однородная система линейных уравнений, которую мы представим в виде

$$M\psi = 0, \quad M_{nm} = \delta_{nm} - W_m G_l^{(j)}(\chi_q, r_n, r_m) V(r_m), \quad (19)$$

где ψ – вектор, составленный из значений волновых функций в узловых точках квадратурной формулы; W_m и r_m – коэффициенты и узловые точки квадратурной формулы соответственно. Условие существования ненулевых решений полученной системы уравнений

$$f(\chi_q) = \det M = 0 \quad (20)$$

является условием квантования энергии – трансцендентным уравнением относительно дискретных значений величины χ_q . Решения уравнения (20) целесообразно представить графически на комплексной плоскости χ_q . В случае потенциала (1) корни уравнения (20) расположены на вещественной оси. Графически можно определить положение корней уравнения (20), а для их нахождения с требуемой точностью необходимо применять какой-либо численный метод. В данной работе мы использовали метод парабол [14].

Результаты решения

Изложим результаты решения задачи для релятивистского гармонического осциллятора описанными методами. Рассмотрим вначале энергетический спектр. На рис. 1 приведены результаты графического решения уравнения (20): сплошными линиями изображены нули вещественной части функции $f(\chi_q)$, пунктирными – мнимой, точки пересечения этих линий – это корни уравнения (обведены кружками). Вычисления проведены в случае $m=1$, $\omega=1$.

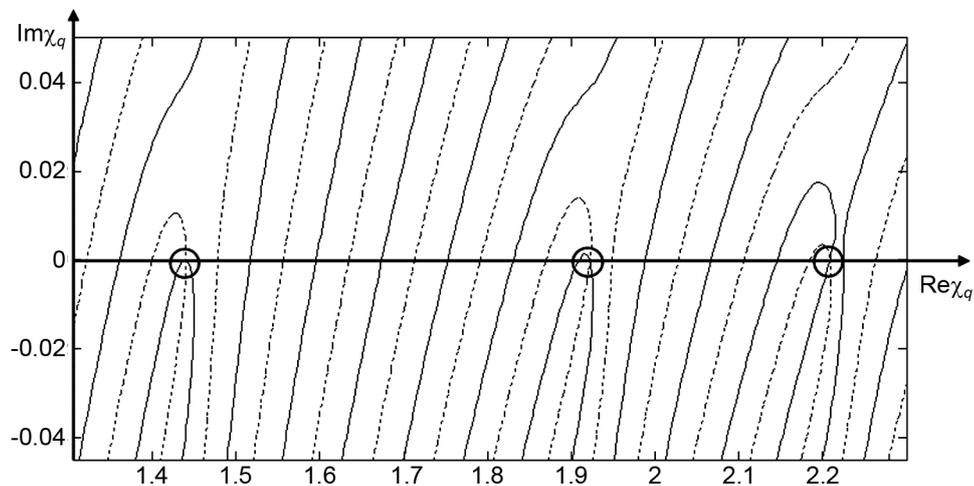


Рис. 1. Графическое решение уравнения (20) в комплексной плоскости быстроты

Представленные на рис. 1 корни уравнения (21) соответствуют величинам энергии трёх первых состояний релятивистского гармонического осциллятора (1). В таблице приведены значения энергии для первых пяти состояний, найденные тремя способами при разных значениях константы связи ω .

Значения энергии релятивистского гармонического осциллятора

Номер состояния n	Численное решение в импульсном представлении	Приближённое решение в импульсном представлении	Решение в РКП
$\omega = 0.5$			
1	3.3266856	3.2827875	3.3266856
2	4.7745776	4.7499059	4.7745776
3	6.0647951	6.0475481	6.0647951
4	7.2602146	7.2469130	7.2602147
5	8.3899913	8.3791426	8.3899916
$\omega = 1$			
1	4.4575153	4.4340641	4.4575153
2	6.9820604	6.9688641	6.9820604
3	9.2137508	9.2045646	9.2137508
4	11.2795927	11.2725341	11.2795928
5	13.2337174	13.2279780	13.2337177

Окончание таблицы

Номер состояния n	Численное решение в импульсном представлении	Приближённое решение в импульсном представлении	Решение в РКП
$\omega = 4$			
1	9.9176430	9.9125166	9.9176430
2	17.4372346	17.4338824	17.4372346
3	24.1520149	24.1496003	24.1520149
4	30.4214462	30.4195702	30.4214463
5	36.3935674	36.3920360	36.3935676
$\omega = 10$			
1	18.7458897	18.7441887	18.7458718
2	34.3783383	34.3770590	34.3783383
3	48.5435979	48.5426370	48.5435979
4	61.8714963	61.8707376	61.8714966
5	74.6343046	74.6336807	74.6343053

Сравнение полученных разными способами значений энергии позволяет сделать вывод о точности вычислений. В частности, сравнение величин энергии, полученных численным решением задачи Штурма – Лиувилля в импульсном представлении, с величинами, найденными решением интегрального уравнения в РКП, показывает, что с ростом ω точность вычислений снижается. В то же время точность величин энергии, найденных приближённо аналитически, с увеличением константы связи ω возрастает. Таким образом, приближённый метод более эффективен для решения при больших значениях ω , чем численные методы.

На рис. 2 проиллюстрирована зависимость энергии $2E_q$ релятивистского гармонического осциллятора от величины константы связи ω и волновые функции в импульсном представлении, найденные численно при $m=1$ и $\omega=1$ для первых трёх состояний. Как видно на рис. 2, а, зависимость энергии от величины ω в указанном интервале близка к линейной. Графики приближённых волновых функций (15) визуально неотличимы от численных для указанных значений величин m , ω , поэтому мы их не приводим.

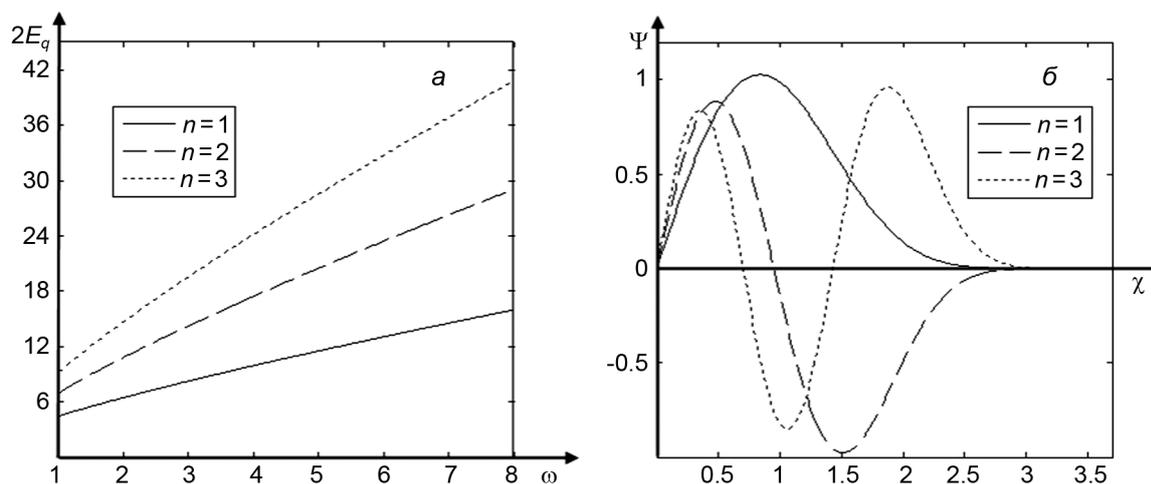


Рис. 2. Энергетический спектр (а) и волновые функции в импульсном представлении (б) релятивистского гармонического осциллятора

Как видно на рис. 2, б, характерной особенностью волновых функций релятивистского гармонического осциллятора в импульсном представлении является равенство количества нулей номеру состояния двухчастичной системы. Аналогичным свойством обладают релятивистские волновые функции в импульсном представлении и для других типов взаимодействий, например потенциалов однобозонного обмена [16].

На рис. 3 приведены волновые функции в РКП для первых трёх состояний при $m=1$, $\omega=5$. На рисунках *a* и *б* изображены графики волновых функций, полученных численным решением интегрального уравнения в РКП (4) (numerical) и приближённых волновых функций (17) (approximate). Как видно, результаты нахождения волновых функций численно в РКП и приближённо аналитически визуально неразличимы.

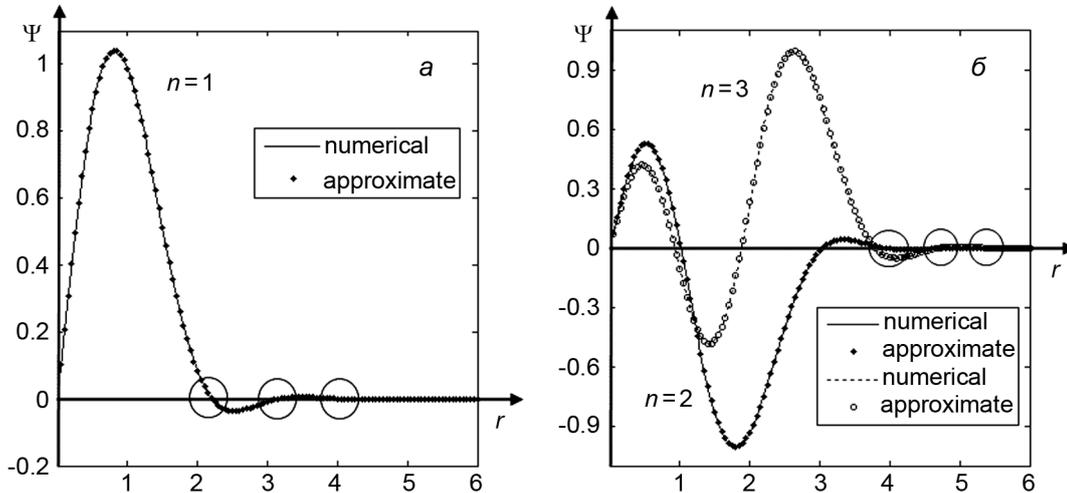


Рис. 3. Волновые функции в РКП основного состояния (*a*), второго и третьего состояния (*б*)

На рис. 3 видно, что основной особенностью волновых функций в РКП является наличие у них дополнительных нулей (обведены кружками), по сравнению с рассмотренными волновыми функциями в импульсном представлении и волновыми функциями нерелятивистского гармонического осциллятора, у которых число нулей равно номеру квантового состояния [2]. В нерелятивистской квантовой механике это свойство для произвольного потенциала доказано в виде теоремы [1]. В релятивистской же теории такое доказательство нам неизвестно. Следует отметить, что в работе, посвящённой исследованию потенциалов однобозонного обмена в РКП, такое свойство волновых функций, аналогичное нерелятивистскому, было обнаружено [16]. Однако теперь очевидно, что волновые функции в РКП обладают этим свойством не для всех типов взаимодействия. Кроме того, численные расчёты показывают, что для фиксированного номера состояния n количество нулей волновой функции зависит от величины константы связи ω . Описанное свойство релятивистских волновых функций, насколько нам известно, не имеет нерелятивистских аналогов.

Заключение

Найдено решение уравнения Логунова – Тавхелидзе для трёхмерного гармонического осциллятора в РКП в сферически-симметричном случае. Решение уравнения было получено в импульсном и релятивистском конфигурационном представлении. В импульсном представлении интегральное уравнение было сведено к задаче Штурма – Лиувилля, решение которой было найдено в приближённой аналитической форме и численно. Приближённые волновые функции были выражены через функцию Макдональда мнимого индекса, при этом для определения значений энергии релятивистского осциллятора было получено трансцендентное уравнение. В РКП решение интегрального уравнения было найдено численно. Полученные волновые функции в РКП (как приближённые аналитические, так и численные) обладают дополнительными нулями по сравнению с аналогичными волновыми функциями в импульсном представлении и с волновыми функциями нерелятивистского гармонического осциллятора в координатном представлении. При этом количество этих нулей для заданного квантового состояния зависит от величины константы связи релятивистского гармонического осциллятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мессиа А. Квантовая механика. Т. 1. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
2. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. – М.: Наука, 1971. – 544 с.

3. Atakishiyev N.M., Mir-Kasimov R.M., and Nagiyev Sh.M. // *Ann. Phys.* – 1985. – V. 42. – No. 1. – P. 25–30.
4. Nagiyev S.M., Jafarov E.I., and Imanov R.M. // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2003. – V. 36. – P. 7813–7824.
5. Nagiyev S.M., Jafarov E.I., Imanov R.M., and Homorodean L. // *Phys. Lett. A.* – 2005. – V. 334. – P. 260–266.
6. Frick R.A. // *Ann. Phys.* – 2011. – V. 523. – No. 11. – P. 871–882.
7. Logunov A.A. and Tavkhelidze A.N. // *Nuovo Cimento.* – 1963. – V. 29. – No. 2. – P. 380–399.
8. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. // *ЭЧАЯ.* – 1972. – Т. 2. – № 3. – С. 635–690.
9. Капшай В.Н., Фиалка С.И. // *Изв. вузов. Физика.* – 2017. – Т. 60. – № 10. – С. 44–50.
10. Kapshai V.N. and Alferova T.A. // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1999. – V. 32. – P. 5329–5342.
11. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Физматлит, 2008. – 400 с.
12. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям: с формулами, графиками и математическими таблицами.* – М.: Наука, 1979. – 832 с.
13. Мак-Лахлан Н.В. *Теория и приложения функций Матъе.* – М.: ИЛ, 1953. – 449 с.
14. Калиткин Н.Н. *Численные методы.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
15. Бейтмен Г., Эрдейн А. *Высшие трансцендентные функции. Т. 1.* – М.: Наука, 1973. – 296 с.
16. Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н. // *Изв. вузов. Физика.* – 2013. – Т. 56. – № 4. – С. 71–78.
17. Kapshai V.N., Shilyaeva K.P., and Grischechkin Yu.A. // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2011. – Т. 9. – № 4. – С. 33–37.

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 10.07.18.