В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, Ковариантные двухчастичные волновые функции для модельных квазипотенциалов, допускающих точные решения. I. Решения в импульсном пространстве, *ТМФ*, 1983, том 54, номер 3, 406–415

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 54, № 3
март, 1983

КОВАРИАНТНЫЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ, ДОПУСКАЮЩИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

I. РЕШЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Капшай В. Н., Скачков Н. Б.

Ковариантные двухчастичные уравнения (уравнение Логунова – Тавхелидзе и спроецированное на положительно-частотные состояния уравнение) решены точно для некоторых модельных квазипотенциалов (в том числе содержащих часть, соответствующую отталкиванию на малых расстояниях) в импульсном представлении. Рассматриваются условия нормировки и ортогональности волновых функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Разработке методов решения релятивистских трехмерных двухчастичных квазипотенциальных уравнений [1, 2] посвящено большое число работ [3–10]. Точные решения этих релятивистских уравнений даже для некоторых модельных квазипотенциалов представляют такой же интерес, как и аналогичные решения в нерелятивистской квантовой механике. Практическая польза от таких решений в том, что они могут использоваться как базисные функции для разложения по ним искомых волновых функций для других потенциалов. Нахождению точных решений для ряда потенциалов и посвящена наша работа.

Релятивистские квазипотенциальные уравнения пишутся для волновой функции (ВФ) относительного движения связанной системы двух частиц, которая определяется через бете-солпитеровскую ВФ следующим ковариантным образом [3]:

$$M^{-1/2}(\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2+m^2)^{-1/2}\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\int\exp\left[\frac{i}{2}x(p_1-p_2)\right]\delta(\lambda_P x)\times$$
$$\times\left\langle 0\left|T\left\{\varphi_1\left(\frac{x}{2}\right)\varphi_2\left(-\frac{x}{2}\right)\right\}\right|\mathbf{P},M\right\rangle dx. \tag{1.1}$$

Здесь $x=x_1-x_2$ – относительная координата двух скалярных частиц, имеющих одинаковые массы ($m_1=m_2=m$) и характеризуемых полевыми операторами $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$, $P=p_1+p_2$ – суммарный импульс двух частиц, $M=\sqrt{P^2}$ – инвариантная масса двухчастичной системы, а вектор $\lambda_P{}^\mu=M^{-1}P^\mu$ в системе центра масс (СЦМ) имеет компоненты $(1,0)$, благодаря чему в этой системе δ-функция в (1.1) обеспечивает приравнивание времен $(\overset{0}{x}_1)_0=(\overset{0}{x}_2)_0$. Нуликами сверху обозначены ковариантные обобщения импульсов в СЦМ, например, $(\overset{0}{p}_1)_\mu=(\Lambda_P^{-1}p_1)_\mu$ [3, 11], где Λ_P — чистое преобразование Лоренца такое, что $\Lambda_P(M, 0)=(P^0, \mathbf{P})$, а значит,

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_1=\mathbf{p}_1-\frac{\mathbf{P}}{M}\left[(p_1)_0-\frac{\mathbf{p}_1\mathbf{P}}{P_0+M}\right]; \quad (\overset{0}{p}_1)_0=(\Lambda_P^{-1}p_1)_0=p_1^\mu P_\mu/M. \tag{1.2}$$

ВФ (1.1) удовлетворяет трехмерному уравнению Логунова — Тавхелидзе [1]:

$$(m^2+\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2-E^2)\,\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\frac{1}{4(2\pi)^3}\int V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)\,\Psi(\overset{0}{\mathbf{k}})\frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}. \tag{1.3}$$

При этом $\overset{0}{\mathbf{p}}=\overset{0}{\mathbf{p}}_1=-\overset{0}{\mathbf{p}}_2$, $M=2E$, а 4-импульсы всех частиц в трехмерном подходе находятся на массовой поверхности

$$E_p^2-\mathbf{p}^2\equiv p_0^2-\mathbf{p}^2=m^2. \tag{1.4}$$

Настоящая работа может рассматриваться как продолжение и развитие нашей предыдущей работы [8]. Здесь мы в разделе 2 найдем в импульсном представлении вид волновых функций в случае, когда квазипотенциал является обобщением нерелятивистского кулоновского потенциала [8], но с такой модификацией при больших значениях передач, которая соответствует введению отталкивания на малых расстояниях. В разделе 3 приведены соотношения нормировки и ортогональности для ряда волновых функций, а в разделе 4 рассмотрены аналоги полученных решений для уравнения, возникающего при проецировании на положительно-частотные состояния [12, 13] в случае спиновых частиц.

2. РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ СУПЕРПОЗИЦИЕЙ МОДЕЛЬНОГО КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА С ОТТАЛКИВАНИЕМ НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

В теории одновременных двухчастичных уравнений уравнение (1.3) для волновой функции (1.1) всегда сопровождается уравнением для релятивистской амплитуды рассеяния двух частиц [1])

$$T(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{q}})=V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{q}};E)+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)\frac{T(\overset{0}{\mathbf{k}},\overset{0}{\mathbf{q}})}{\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2-\overset{0}{\mathbf{q}}{}^2-i\varepsilon}\frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}. \tag{2.1}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение для нахождения неизвестной функции — квазипотенциала $V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{q}}; E)$ (в общем случае комплексного и параметрически зависящего от полной энергии системы $2E$), если амплитуду $T(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{q}})$ считать известной величиной, например, заданной диаграммами теории поля. Для решения уравнения (1.3) необходимо знание квазипотенциала $V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E)$ вне энергетической поверхности (ЭП) $\overset{0}{p}_0=\overset{0}{k}_0$ для чего, в свою очередь, при нахождении $V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E)$ из (2.1) необходимо знание вне ЭП $\overset{0}{p}_0=\overset{0}{q}_0$ функции $T(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{q}})$, которая в теории

[1]) Мы будем интересоваться лишь случаем двух частиц с равными массами $m_1=m_2=m$ и выберем систему единиц, где $\hbar=c=1$.

поля определена лишь на поверхности сохранения энергии-импульса. Продолжение амплитуды $T(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{q}})$ за энергетическую поверхность естественно допускает некоторый произвол (см., например, [1, 3, 10]).

Так, если мы потребуем, чтобы квазипотенциал в первом порядке теории возмущений совпадал с инвариантной амплитудой обмена скалярным бозоном:

$$V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E) = T(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}) = \frac{4m^2g^2}{\mu^2 - (p-k)^2}, \tag{2.2}$$

то получим, что

$$V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E) = \frac{4m^2g^2}{\mu^2 - 2m^2 + \sqrt{m^2 + \Delta^2_{\overset{0}{p}, \overset{0}{k}}}} \equiv V(\overset{0}{p}(-)\overset{0}{k})$$

станет функцией вектора

$$\Delta_{\overset{0}{p}, \overset{0}{k}} = \overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}} = \overset{0}{\mathbf{p}} - \frac{\overset{0}{\mathbf{k}}}{m}\left(\overset{0}{p}_0 - \frac{\overset{0}{\mathbf{k}}\overset{0}{\mathbf{p}}}{\overset{0}{k}_0 + m}\right), \tag{2.3}$$

который есть разность векторов $\overset{0}{\mathbf{p}}$ и $\overset{0}{\mathbf{k}}$ в трехмерном импульсном пространстве, реализованном на верхней поле массового гиперболоида (1.4) и обладающем геометрией пространства Лобачевского [4]. Аналогичный факт зависимости потенциала в уравнении Шредингера от эвклидовой разности $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ позволяет получить в конфигурационном представлении уравнение с локальным потенциалом.

В приложениях (см., например, [9]) используется феноменологический потенциал, который есть суперпозиция двух потенциалов однобозонного обмена (релятивизованный потенциал Тйона). В [8] был рассмотрен потенциал в виде такой суперпозиции, которая на ЭП есть

$$V_0(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E) = 4m^2g^2\left\{\frac{1}{0-(p-k)^2} - \frac{1}{4m^2-(p-k)^2}\right\} = \tag{2.4}$$
$$= \frac{4m^2g^2}{\Delta^2_{\overset{0}{p}, \overset{0}{k}}} \equiv V_0(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}).$$

Там же было показано, что если определить продолжение квазипотенциала (2.4) за ЭП в виде

$$V_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E) = V_0(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}})\frac{E_{\overset{0}{k}}}{E} = \frac{4m^2g^2}{\Delta^2_{\overset{0}{p}, \overset{0}{k}}}\frac{E_{\overset{0}{k}}}{E}, \tag{2.5}$$

то уравнение (1.3) допускает точное решение в импульсном представлении. Действительно, после подстановки (2.5) в (1.3) мы приходим к уравнению [2])

$$(E_{\overset{0}{p}}^2 - E^2)\Psi_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{m^2}{(2\pi)^3E}\int\frac{g^2}{(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}})^2}\Psi_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{k}})\,d\overset{0}{\mathbf{k}}. \tag{2.6}$$

---

[2]) Способ продолжения $V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E)$ за энергетическую поверхность, с помощью которого квазипотенциальное уравнение сводится формально к уравнению Шредингера, в литературе [10] называется методом «минимальной релятивизации».

В сферически-симметричном случае $\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\Psi(\overset{0}{p})$, где $\overset{0}{p}=|\overset{0}{\mathbf{p}}|$, решение (2.6) для n-го радиального возбуждения имеет вид

$$\Psi_{\mathrm{I}}^{(n)}(\overset{0}{p})=\frac{1}{(E_{\overset{0}{p}}^{2}-E_{n}^{2})^{2}}\sum_{l=1}^{n} lB_{l}^{(m)}\left(\frac{m^{2}-E_{n}^{2}}{E_{\overset{0}{p}}^{2}-E_{n}^{2}}\right)^{l-1}, \tag{2.7}$$

а энергетический спектр определяется формулой [8] (см. также [4, 14, 15])

$$\frac{g^{2}}{4\pi}\frac{m^{2}}{E_{n}^{2}\sqrt{m^{2}-E_{n}^{2}}}=n;\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{2.8}$$

Коэффициенты $B_{l}^{(n)}$ $(l=1,\ldots,n)$ определяются следующим образом:

$$B_{l}^{(n)}=(-1)^{l-1}\frac{\Gamma(n+l)4^{l}}{l\Gamma(2l)\Gamma(n+1-l)}C_{\mathrm{I}}^{(n)}, \tag{2.9}$$

где $C_{\mathrm{I}}^{(n)}$ есть нормировочная постоянная ВФ n-го состояния.

Рассмотрим теперь модельный потенциал, который будет состоять из двух частей:

$$V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)=\frac{4m^{2}}{E}\left(\frac{g^{2}E_{\overset{0}{p}}}{(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}})^{2}}-\frac{\varkappa^{2}}{|\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}|^{2}}\right). \tag{2.10}$$

Первое слагаемое в скобках в (2.10) отличается от (2.5) лишь использованием вместо множителя $E_{\overset{0}{k}}/E$, управляющего выходом за ЭП, фактора $E_{\overset{0}{p}}/E$, а второе слагаемое (2.10) является в отличие от первого отрицательно-определенной величиной, т. е. потенциалом отталкивания [3].

Уравнение (1.3) с потенциалом (2.10) имеет вид

$$\begin{aligned}(E_{\overset{0}{p}}^{2}-E^{2})\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})&=\\ &=\frac{m}{(2\pi)^{3}E}\int\left\{E_{\overset{0}{p}}\frac{g^{2}}{|\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}|^{2}}-\frac{\varkappa^{2}}{|\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}|}\right\}\Psi(\overset{0}{\mathbf{k}})\frac{md\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^{2}+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^{2}}}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Проинтегрировав в этом уравнении (в случае $\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\Psi(\overset{0}{p})$) по углам, приходим к уравнению

$$\begin{aligned}(E_{p}^{2}-E^{2})\overset{0}{p}\Psi(\overset{0}{p})=\frac{m}{(2\pi)^{2}E}\int_{0}^{\infty}&\left\{g^{2}E_{\overset{0}{p}}\ln\left|\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\chi_{p}-\chi_{k}}{2}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\chi_{p}+\chi_{k}}{2}\right)}\right|-\right.\\ &\left.-2m\varkappa^{2}[\chi_{k}\theta(\chi_{p}-\chi_{k})+\chi_{p}\theta(\chi_{k}-\chi_{p})]\right\}\overset{0}{k}\Psi(\overset{0}{k})\,md\chi_{k},\end{aligned} \tag{2.12}$$

где быстрота χ_{p} определяется из параметризации:

$$E_{\overset{0}{p}}=m\operatorname{ch}\chi_{p};\quad \overset{0}{\mathbf{p}}=\frac{\overset{0}{\mathbf{p}}}{|\overset{0}{\mathbf{p}}|}m\operatorname{sh}\chi_{p} \tag{2.13}$$

---

[3] Уравнение (1.3) с потенциалом притяжения $V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};\ E)=\varkappa^{2}|\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}|^{-1}=2m\varkappa^{2}[(Q^{2}+4m^{2})Q^{2}]^{-1/2}$, где $Q^{2}=-(p-k)^{2}$, будет подробно рассмотрено нами в следующей работе.

(и аналогично для других 4-импульсов, удовлетворяющих (1.4)). Проинтегрировав в (2.12) формально по частям и используя параметризацию $E=m\cos x$, запишем в терминах быстрот

$$(2.14)\qquad (\mathrm{ch}^2\chi_p-\cos^2 x)\,\mathrm{sh}(\chi_p)\,\Psi(\chi_p)=\frac{1}{(2\pi)^2\cos x}\int_0^\infty\left\{\frac{g^2\,\mathrm{sh}(2\chi_p)\,\mathrm{ch}\chi_k}{\mathrm{sh}^2\chi_p-\mathrm{sh}^2\chi_k}-\right.$$

$$\left.-2\varkappa^2\theta(\chi_p-\chi_k)\right\}d\chi_k\int_{\chi_k}^\infty \mathrm{sh}(\chi')\,\Psi(\chi')\,d\chi',$$

где положено $\Psi(\overset{0}{p})=\Psi(\chi_p)$, а интеграл по $d\chi_k$ понимается в смысле главного значения. Решения уравнения (2.14) можно построить аналогично тому, как это делалось в [8]. Так, выбирая в качестве ВФ основного состояния выражение

$$(2.15)\qquad \Psi^{(1)}(\chi_p)=\frac{C^{(1)}m\,\mathrm{ch}\,\chi_p}{(m^2\,\mathrm{ch}^2\chi_p-m^2\cos^2 x)^2}\left[1+2D\frac{m^2\sin^2 x}{m^2\,\mathrm{ch}^2\chi_p-m^2\cos^2 x}\right],$$

приходим к выводу, что (2.14) удовлетворяется, если энергия $2m\cos x$ и постоянная D определяются соотношениями

$$(2.16)\qquad \frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{\sin 2x}=2;\qquad D=-2\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}.$$

Кроме того, мы получаем условие для константы $\varkappa^2$, которая в данном случае должна равняться $4\pi^2$. Для общего случая ВФ n-го состояния уравнения (2.11)

$$(2.17)\qquad \Psi^{(n)}(\chi_p)=\frac{C^{(n)}m\,\mathrm{ch}\,\chi_p}{(m^2\,\mathrm{ch}^2\chi_p-m^2\cos^2 x_n)^2}\left[1+\sum_{s=1}^n D_s^{(n)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{m^2\sin^2 x_n}{m^2\,\mathrm{ch}^2\chi_p-m^2\cos^2 x_n}\right)^s\right]$$

из (2.14) можно получить алгебраическую систему уравнений, из которой в принципе определяются все коэффициенты $D_s^{(n)}$ и энергия $2E_n=2m\cos x_n$, причем решения системы существуют не при любых значениях $\varkappa^2$, а только при некоторых. Константа g^2 при этом может быть произвольной.

3. УСЛОВИЯ НОРМИРОВКИ И ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ ВФ

Обратимся теперь к условиям нормировки и ортогональности, которые существенно зависят от вида квазипотенциала, в частности от способа его продолжения за ЭП. В [8] было показано, что на энергетической поверхности $E_{\overset{0}{p}}=E_{\overset{0}{k}}^{0}=E$, где множитель $N_{\mathrm{I}}(E_{\overset{0}{p}}, E^k, E)=E_{\overset{0}{k}}E^{-1}$ в (2.5) обращается в единицу, амплитуда $T(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{q}})$ с потенциалом $V_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)$ удовлетворяет условию двухчастичной унитарности. Для изучения зависимости от способа выхода за ЭП мы рассмотрим также продолжение согласно закону

$$(3.1)\qquad V_{\mathrm{II}}(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)=V_0(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}})\,N_{\mathrm{II}}(E_{\overset{0}{p}},E_{\overset{0}{k}},E)=\frac{4m^2g^2}{(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}})^2}\,\frac{E_{\overset{0}{p}}}{E}$$

и более симметричный выход

$$V_{\mathrm{III}}(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E) = V_0(\overset{0}{\mathbf{p}}\,(-)\,\overset{0}{\mathbf{k}})\, N_{\mathrm{III}}(E_{\overset{0}{p}}, E_{\overset{0}{k}}; E) = \frac{4m^2g^2}{(\overset{0}{\mathbf{p}}\,(-)\,\overset{0}{\mathbf{k}})^2}\, \frac{\sqrt{E_{\overset{0}{p}}E_{\overset{0}{k}}}}{E}. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что оба эти способа тоже согласуются с условием двухчастичной унитарности (условие (2.7) в работе [8]). Кроме того, эти простейшие способы выхода за ЭП допускают нахождение точных ВФ, которые просто связаны с ВФ (2.7).

Обратимся теперь к условиям нормировки и ортогональности ВФ для различных способов (2.5), (3.1) и (3.2) задания квазипотенциала вне ЭП. Как показано в [13], в подходе, основанном на рассмотрении двухвременной функции Грина системы частиц, возможно получить условие нормировки ВФ. Для ВФ n-го состояния, удовлетворяющей уравнению (1.3), это условие имеет вид

$$\begin{aligned} 2E_n = {} & \frac{2E_n}{(2\pi)^3}\int \overset{*}{\Psi}{}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})\frac{d\overset{0}{\mathbf{p}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2}}\,\Psi^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}}) + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^6}\int \overset{*}{\Psi}{}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})\frac{d\overset{0}{\mathbf{p}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2}}\,\frac{1}{4}\left[\frac{\partial V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; E)}{\partial E}\right]_{E=E_n} \times \\ & \times \frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}\,\Psi^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Условие ортогональности ВФ, отвечающих различным значениям квантового числа n, которое может быть получено непосредственно из уравнения для ВФ, также существенно зависит от конкретного вида квазипотенциала $V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}, E)$.

Легко показать, что условия нормировки и ортогональности в случае квазипотенциала (2.5), т. е. для ВФ (2.7), имеют соответственно вид

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \overset{*}{\Psi}{}^{(n)}_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}})\,[3E_n{}^2 - E_{\overset{0}{p}}{}^2]\,\Psi^{(n)}_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}})\,\frac{d\overset{0}{\mathbf{p}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2}} = 2E_n{}^2; \tag{3.4}$$

$$\int \overset{*}{\Psi}{}^{(n)}_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}})\,[E_{\overset{0}{p}}{}^2 - E_n{}^2 - E_m{}^2 - E_nE_m]\,\Psi^{(m)}_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}})\,d\overset{0}{\mathbf{p}} = 0, \quad n \neq m. \tag{3.5}$$

Исходя из явного вида ВФ (2.7), легко проверить, например, что (3.5) превращается в тождество для $n=1$, $m=2$, т. е. для ВФ

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}}) &= \frac{C^{(1)}_{\mathrm{I}}}{(E_{\overset{0}{p}}{}^2 - E_1{}^2)^2}; \\ \Psi^{(2)}_{\mathrm{I}}(\overset{0}{\mathbf{p}}) &= \frac{2C^{(2)}_{\mathrm{I}}}{(E_{\overset{0}{p}}{}^2 - E_2{}^2)^2}\left[1 - 2\frac{m^2 - E_2{}^2}{E_{\overset{0}{p}}{}^2 - E_2{}^2}\right], \end{aligned} \tag{3.6}$$

при учете условия квантования (2.8). Нормировочные константы $C^{(n)}_{\mathrm{I}}$, которые могут быть выбраны вещественными, легко определяются из (3.4), однако выражение даже для $C^{(1)}_{\mathrm{I}}$ достаточно громоздко, поэтому приводить их здесь не будем.

Если продолжить квазипотенциал (2.4) за ЭП согласно закону (3.1), то уравнение (1.3) примет вид

$$(3.7)\qquad (E_{\overset{0}{p}}^2 - E^2)\,\Psi_{\mathrm{II}}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{mE_{\overset{0}{p}}}{(2\pi)^3}\int \frac{m}{E}\,\frac{g^2}{\Delta^2_{p,k}}\,\Psi_{\mathrm{II}}(\overset{0}{\mathbf{k}})\,\frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}\,.$$

ВФ этого уравнения с точностью до числовых множителей просто выражаются через функции $\Psi_{\mathrm{I}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})$: $\Psi_{\mathrm{II}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}}) \cong E_{\overset{0}{p}}\Psi_{\mathrm{I}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})$, так что, например, ВФ основного состояния уравнения (3.7) имеет вид

$$(3.8)\qquad \Psi_{\mathrm{II}}^{(1)}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = C_{\mathrm{II}}^{(1)}\,\frac{E_{\overset{0}{p}}}{(E_{\overset{0}{p}}^2 - E_1^2)^2}$$

и аналогично для других центрально-симметричных ВФ. Константы $C_{\mathrm{II}}^{(n)}$ определяются из нормировочного условия, совпадающего по виду с (3.4), при этом, разумеется, $C_{\mathrm{II}}^{(n)}$ отличается от $C_{\mathrm{I}}^{(n)}$. Условие ортогональности ВФ уравнения (3.7) может быть записано в виде

$$(3.9)\qquad \int \overset{*}{\Psi}{}_{\mathrm{II}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})\,E_{\overset{0}{p}}^{-1}\,[E_n^2 + E_m^2 + E_nE_m - E_{\overset{0}{p}}^2]\times$$
$$\times\,\Psi_{\mathrm{II}}^{(m)}(\overset{0}{\mathbf{p}})\,\frac{d\overset{0}{\mathbf{p}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2}} = 0;\quad n\neq m,$$

а условие квантования совпадает с (2.8).

В случае симметрично продолженного за ЭП потенциала (2.4) уравнение (3.1) приобретает вид

$$(3.10)\qquad (E_{\overset{0}{p}}^2 - E^2)\,\Psi_{\mathrm{III}}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{m^2}{(2\pi)^3 E}\int \sqrt{E_{\overset{0}{p}}}\,\frac{g^2}{\Delta^2_{\overset{0}{p},\overset{0}{k}}}\,\sqrt{E_{\overset{0}{k}}}\,\Psi_{\mathrm{III}}(\overset{0}{\mathbf{k}})\,\frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}\,.$$

ВФ $\Psi_{\mathrm{III}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})$ легко построить, зная ВФ уравнений (2.6) либо (3.7). Так, $\Psi_{\mathrm{III}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}}) \cong E_{\overset{0}{p}}^{1/2}\Psi_{\mathrm{I}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})$, условие квантования уровней энергии для (3.10) есть (2.8), а условие нормировки ВФ $\Psi_{\mathrm{III}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})$ вместе с условием ортогональности может быть записано в виде

$$(3.11)\qquad \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Psi_{\mathrm{III}}^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})[E_n^2 + E_m^2 + E_nE_m - E_{\overset{0}{p}}^2]\,\Psi_{\mathrm{III}}^{(m)}(\overset{0}{\mathbf{p}})\frac{d\overset{0}{\mathbf{p}}}{E_{\overset{0}{p}}} = 2E_n^2\delta_{nm}.$$

Приведем нормированные ВФ основного и первого возбужденного состояний, используя параметризацию энергии системы $2E_n = 2m\cos x_n$:

$$\Psi_{\mathrm{III}}^{(1)}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{C_{\mathrm{III}}^{(1)}\sqrt{E_{\overset{0}{p}}}}{(E_{\overset{0}{p}}^2 - m^2\cos^2 x_1)^2}\,,\qquad \sin 2x_1 = \frac{g^2}{8\pi}\,,$$

$$|C_{\mathrm{III}}^{(1)}|^2 = (8m)^2\pi m\,\frac{\sin^5 x_1}{\cos^2 x_1\cos 2x_1}\,;$$

$$\Psi_{\mathrm{III}}^{(2)}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{C_{\mathrm{III}}^{(2)}\sqrt{E_{\overset{0}{p}}}}{(E_{\overset{0}{p}}^2 - m^2\cos^2 x_2)^2}\left[1 - 2\,\frac{m^2\sin^2 x_2}{E_{\overset{0}{p}}^2 - m^2\cos^2 x_2}\right],$$

$$\sin 2x_2 = \frac{g^2}{8\pi},\qquad C_{\mathrm{III}}^{(2)} = (16m)^2\pi m\,\frac{\sin^5 x_2}{\cos^2 x_2\cos 2x_2}\,.$$

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СПРОЕЦИРОВАННОГО НА ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ЧАСТОТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Наряду с квазипотенциальным уравнением (1.3) мы рассмотрим также двухчастичное уравнение для ВФ, полученное в [2] на основе ковариантной гамильтоновой формулировки в квантовой теории поля. Это уравнение имеет вид [2, 4, 14]

$$(4.1)\qquad (2E_{\overset{0}{p}}-2E)\,\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)\,\Psi(\overset{0}{\mathbf{k}})\frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}.$$

Отметим, что в работах [3, 16] аналогичное уравнение было получено на основе рассмотрения двухчастичной функции Грина спинорных частиц, спроектированной на положительно-частотные состояния. При этом квазипотенциал $V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)$ строится с использованием спроектированной на положительно-частотные состояния амплитуды рассеяния $T(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{q}})$ и зависит, вообще говоря, от спиновых индексов. Нахождение точных или приближенных решений уравнения (4.1) с тем или иным взаимодействием также представляет интерес. Мы рассмотрим уравнение (4.1) в случае модельных квазипотенциалов, допускающих нахождение точных ВФ. Эти уравнения, как будет видно ниже, будучи записанными в терминах быстрот, просто связаны с рассмотренными выше.

Выберем в (4.1) в качестве квазипотенциала выражение (для простоты не зависящее от энергии $2E$)

$$(4.2)\qquad V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)=\frac{g^2\sqrt{E_{\overset{0}{p}}+m}}{(\Delta^0_{\overset{0}{p},\overset{0}{k}}-m)\sqrt{2\Delta^0_{\overset{0}{p},\overset{0}{k}}+2m}}.$$

Отметим, что квазипотенциал $V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};E)=\dfrac{g^2}{\Delta^0_{\overset{0}{p},\overset{0}{k}}-m}=\dfrac{mg^2}{(p-k)^2}$ отвечает случаю, когда взаимодействие переносится безмассовым бозоном.

Уравнение (4.1) с квазипотенциалом (4.2) в случае, когда $\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\Psi(\overset{0}{p})$, после интегрирования по угловым переменным принимает вид (в терминах быстрот)

$$(4.3)\qquad (2m\,\mathrm{ch}\,\chi_p-2m\cos x)\,\overset{0}{p}\,\Psi(\overset{0}{p})=\frac{g^2}{(2\pi)^2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\times$$
$$\times\int_0^\infty \ln\left|\frac{\mathrm{sh}(\chi_p/2)+\mathrm{sh}(\chi_k/2)}{\mathrm{sh}(\chi_p/2)-\mathrm{sh}(\chi_k/2)}\right|\overset{0}{k}\,\Psi(\overset{0}{k})\,m\,d\chi_k,$$

где, как и прежде, энергия параметризуется соотношением $2E=2m\cos x$. Решения этого уравнения могут быть найдены тем же методом, что и в [8]. Приведем, опуская подробности, выражение для ВФ основного состояния (ненормированной):

$$(4.4)\qquad \Psi^{(1)}(\overset{0}{p})=\frac{C}{(2E_{\overset{0}{p}}-2E_1)^2}=\frac{C}{(2m\,\mathrm{ch}\,\chi_p-2m\cos x_1)^2},$$

где энергия определяется условием квантования вида $g^2=16\pi\sin(x_1/2)$.

Аналогично условие квантования n-го возбужденного состояния $2E_n=$ $=2m\cos x_n$ имеет вид $g^2=n\cdot 16\pi\sin(x_n/2)$, т. е. $2E_n=2m-(g^2/4\pi)^2(m/4n^2)$, а волновые функции суть

$$\Psi^{(n)}(\overset{0}{p})=\frac{C^{(n)}}{(2E_{\overset{0}{p}}-2E_n)^2}\times \tag{4.5}$$

$$\times\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}\frac{\Gamma(n+l)\,4^l}{\Gamma(2l)\,\Gamma(n+1-l)}\left(\frac{2m-2E_n}{2E_{\overset{0}{p}}-2E_n}\right)^{l-1}.$$

Нормировочные константы $C^{(n)}$ в нашем случае не зависящего от энергии квазипотенциала фиксируются условием

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\Psi^{(n)}(\overset{0}{\mathbf{p}})|^2 d\overset{0}{\mathbf{p}}=2E_n. \tag{4.6}$$

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2, рассмотрим теперь уравнение (4.1) с потенциалом, содержащим добавку, соответствующую введению отталкивания на малых расстояниях:

$$(2E_{\overset{0}{p}}-2E)\,\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left\{\frac{g^2}{\Delta^0_{\overset{0}{p},k}-m}\sqrt{\frac{E_{\overset{0}{p}}+m}{2\Delta^0_{\overset{0}{p},k}+2m}}-\right. \tag{4.7}$$

$$\left.-\frac{\varkappa^2}{|\Delta_{\overset{0}{p},k}|}\right\}\Psi(\overset{0}{\mathbf{k}})\frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}.$$

В этом случае, как нетрудно показать, ВФ основного состояния имеет вид

$$\Psi(\overset{0}{p})=\frac{C}{(2E_{\overset{0}{p}}-2E)^2}\left[1-2\,\frac{\cos(x/2)}{\cos x}\,\frac{m\sin^2(x/2)}{E_{\overset{0}{p}}-E}\right], \tag{4.8}$$

где энергия определяется из условия $g^2=8\pi\sin(x/2)$, а константа $\varkappa^2$, как и выше, фиксируется условием $\varkappa=2\pi$. Точно так же можно построить ВФ n-го состояния, которая является полиномом $(n+1)$-й степени по $(2E_{\overset{0}{p}}-2E)^{-1}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели несколько примеров взаимодействий, допускающих нахождение точных релятивистских двухчастичных ВФ. Рассмотрение таких примеров полезно во многих отношениях. Во-первых, на основе найденных ВФ могут быть вычислены характеристики, описывающие взаимодействие двухчастичной системы с другими объектами (формфакторы, структурные функции). Во-вторых, знание точных ВФ для модельных взаимодействий позволяет правильно находить приближенные ВФ в случае более реалистических взаимодействий, их асимптотики, условие квантования и т. д. (не исключено также, что рассматриваемые нами взаимодействия, имеют отношение к реальным двухчастичным (двухкварковым) системам).

Отметим здесь, что рассмотренные нами примеры квазипотенциальных уравнений допускают формулировку в другом эквивалентном виде, в виде дифференциально-разностных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении. Обсуждению решений этих уравнений для рассмотренных взаимодействий будет посвящена другая работа.

В заключение авторы выражают благодарность С. П. Кулешову за полезные обсуждения и интерес к работе, а также А. Д. Линкевичу, В. В. Санадзе и А. В. Сидорову за многочисленные обсуждения.

Литература

[1] *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.*— Nuovo Cim. 1963, *29*, № 2, 380–400.
[2] *Kadyshevsky V. G.*— Nucl. Phys. 1968, *B6*, № 1, 125–145.
[3] *Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N.* Relativistically covariant equations for two particles in quantum field theory. Preprint E2-3498, Dubna: JINR, 1967. *Faustov R. N.*— Annals of Phys. 1973, *78*, № 1, 176–189.
[4] *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.*— Nuovo Cim., 1968, *55A*, 233–257. *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.*— ЭЧАЯ, 1972, *2*, № 3, 635–690.
[5] *Filippov A. T., Puzynin I. V., Mavlo D. P.*— J. Comput. Phys. 1976, *22*, № 2, 150–170.
[6] *Гогохия В. Ш., Мавло Д. П., Филиппов А. Т.* Исследование решений квазипотенциального уравнения Логунова – Тавхелидзе и его модификаций. Препринт Р2-9894, Дубна: ОИЯИ, 1976.
[7] *Коцинян Ар. М.* Ковариантный квазипотенциальный формализм для описания реакций с участием двухчастичных связанных состояний. Препринт Р2-8682, Дубна: ОИЯИ, 1975.
[8] *Kapshay V. N., Skachkov N. B.* Exact solution of the covariant two-particle equation with superposition of one-boson exchange quasipotentials. Preprint E2-81-618, Dubna: JINR, 1981.
[9] *Беляев В. Б., Иргазиев Б. Ф.*— ЯФ, 1977, *25*, в. 2, 450–459.
[10] *Brown C. E., Jackson A. D.* The nucleon-nucleon interaction, North – Holland Publ. Comp., Amsterdam – Oxford, 1976.
[11] *Skachkov N. B.* Covariant three-dimensional equation for fermion-antifermion system. Preprints E2-81-294, E2-81-308, E2-81-399, Dubna: JINR, 1981.
[12] *Yaes R. K.*— Phys. Rev., 1971, *D3*, № 12, 3086–3091.
[13] *Фаустов Р. Н.*— ТМФ, 1970, *3*, № 2, 240–254.
[14] *Freeman M., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M.*— Nucl. Phys., 1969, *B12*, № 2, 197–215.
[15] *Архипов А. А., Саврин В. И.* Об одном методе решения квазипотенциального уравнения. Препринт ИФВЭ, № 82-21, Серпухов, 1982.
[16] *Логунов А. А., Саврин В. И., Тюрин Н. Е., Хрусталев О. А.*— ТМФ, 1974, *6*, № 2, 654–662. *Kvinikhidze A. N., Stoyanov D. Ts.* Retarded part of the two-time Green function and two-body relativistic problem. Preprint E2-5746, Dubna: JINR, 1971.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
13.IV.1982 г.

COVARIANT TWO-PARTICLE WAVE FUNCTIONS FOR MODEL QUASIPOTENTIALS WHICH ADMIT EXACT SOLUTIONS

I. SOLUTIONS IN THE MOMENTUM SPACE

Kapshay V. N., Skachkov N. B.

The covariant two-particle equations in the momentum representation (Logunov — Tavkhelidze equation and the equation projected onto positive-frequency states) are exactly solved for some model quasipotentials (among them there are the potentials which include the part corresponding to repulsion at small distances). The normalization condition and condition of orthogonality of the wave functions are considered.