Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Т. Г. ПЛЕТНЕВА, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

О СУММИРУЕМОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛЮБОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 I 1970)

Здесь будут изложены результаты изучения положительных обобщенных в смысле С. Л. Соболева (слабых) решений эллиптических уравнений в ограниченной области Ω с гладкой границей S, т. е. суммируемых в каждой подобласти Ω_1 области Ω функций $u(x)$, удовлетворяющих интегральному тождеству

$$\iint\limits_{\Omega_1} P^*\Phi(x)\,u(x)\,dx \equiv \iint\limits_{\Omega_1} \sum_{|k|\leqslant m} a_k(x)\,D_x^k\Phi(x)\,u(x)\,dx = \iint\limits_{\Omega_1} \Phi(x)\,f(x)\,dx; \quad (1)$$

$\Phi(x)$ — любая пробная функция, имеющая m непрерывных производных в $\overline{\Omega}_1$ и обращающаяся в нуль вместе со своими производными до порядка $m-1$ на границе $\partial\Omega_1$ области Ω_1.

Обозначим через $\rho(x, S)$ расстояние от точки $x \in \Omega$ до S, через $L_1^{(l)}(\Omega)$ — совокупность суммируемых по каждой подобласти области Ω функций, для которых ограничена норма

$$\|u\|_{\Omega;\,l} = \iint\limits_{\Omega} \rho(x, S)^{\gamma}\,|u(x)|\,dx.$$

Основной результат настоящей работы заключается в том, что любая положительная функция (имеющая отрицательную компоненту из $L_1^{(\gamma-m)}(\Omega)$), удовлетворяющая интегральному тождеству (1), принадлежит $L_1^{(\gamma-m)}(\Omega)$ с некоторыми $\gamma \geqslant m$ (γ, вообще говоря, большое), если $f(x) \in L_1^{(\gamma)}(\Omega)$. Устанавливаются алгебраические условия типа усиленной эллиптичности принадлежности всех положительных слабых решений пространству $L_1^{(\gamma-m)}(\Omega)$ с заданным $\gamma \geqslant m$. Исследованием охватываются равномерно эллиптические уравнения с ограниченными коэффициентами и уравнения, могущие вырождаться на границе области. Простые примеры (обыкновенных дифференциальных уравнений) показывают, что формулируемые алгебраические условия естественны и точны.

В случае равномерно эллиптических уравнений любого порядка с гладкими коэффициентами из наших результатов и недавней работы Я. А. Ройтберга ([3]) следует теорема об обобщенном интегральном представлении положительных решений. Методы, здесь развиваемые, позволяют существенно дополнить теоремы о поведении решений в неограниченных областях, изложенные в ([1]). Настоящая работа продолжает исследования В. А. Кондратьева и одного из авторов ([1]).

1. Условия. Рассматриваются слабые решения уравнения вида

$$\sum_{|k|\leqslant m} (-1)^{|k|} D_x^k\,[a_k(x)\,u] = f(x). \quad (1')$$

Фактически мы имеем дело лишь с интегральным тождеством (1). Введем ряд необходимых для формулировки результатов условий:

A_1. $a_k(x)$ — измеримые ограниченные функции, $|a_k(x)| \leqslant B$.

A_2. Многочлен $P_0(x;\sigma) = \sum\limits_{|k|=m} a_k(x)\,\sigma^k$ равномерно эллиптический (р.э.) с постоянной р.э. δ_0.

A_2. Область значений многочлена $w = P_0(x; \sigma)$, σ — любой вещественный вектор, лежит в секторе (конусе) $K_{\varphi_1} = \{w;\ |\arg w| \leqslant \varphi_1 < \pi/2\}$ комплексной w-плоскости.

$A_4^{(\gamma)}$. Существует $\gamma \geqslant m$, для которого многочлен

$$Q_0^{(\gamma)}(x; \sigma) = \sum_{\mu=0}^{m} \prod_{s=0}^{\mu-1} \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right) \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu}{\partial \sigma_n^\mu} P_0(x; \sigma)|_{\sigma_n=0} \sigma_n^\mu$$

р.э. с постоянной р.э. $\delta_0^{(\gamma)}$.

$\widetilde{A}_1$. Оператор P^* имеет вид

$$P^*(x; D_x) \equiv \sum_{|k| \leqslant m} x_n^{|k|-m} b_k(x) D_x^k + \sum_{|k| \leqslant m-1} c_k(x) D_x^k \equiv$$

$$\equiv P_0^*(x; x_n^{-1}; D_x) + P_1^*(x; D_x); \quad P_0^*(x; \theta, D_x) = \sum_{|k| \leqslant m} \theta^{m-|k|} b_k(x) D_x^k,$$

$b_k(x)$, $c_k(x) x_n^{m-|k|}$ — измеримые ограниченные функции; $|c_k(x) x_n^{m-|k|}| \leqslant B$; для достаточно малых x_n, $x_n \in (0, h)$, $|c_k(x) x_n^{m-|k|}| \leqslant q$, q достаточно мало.

$\widetilde{A}_2$. Многочлен $\sum_{|k|=m} b_k(x) \sigma^k$ р. э. с постоянной р. э. δ_0^*.

$\widetilde{A}_4^{(\gamma)}$. Существует $\gamma \geqslant m$, для которого многочлен

$$Q_0^{*(\gamma)}(x; y; \sigma) \equiv \sum_{\mu=0}^{m} \prod_{s=1}^{\mu-1} \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right) \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu}{\partial \sigma_n^\mu} P_0^*(x; \theta; \sigma)\Big|_{\sigma_n=0;\ \theta=\frac{\sigma_n}{\gamma} y}, \quad y \in [0,1],$$

р. э. с постоянной р. э. $\delta_0^{*(\gamma)}$.

$\widetilde{A}_3$. Область значения многочлена $w = \sum_{|k|=m} b_k(x) \sigma$ лежит в секторе K_{φ_1}.

$A_3^{(\gamma)}$ ($\widetilde{A}_3^{(\gamma)}$). Область значений многочлена $w = Q_0^{(\gamma)}(x; \sigma)$ ($w = Q_0^{*(\gamma)}(x; y; \sigma)$) лежит в секторе K_{φ_1}.

$A_5(\widetilde{A}_5)$. $a_k(x)$ ($b_k(x)$) с $|k| = m$ равномерно непрерывны.

Условие $A_4^{(\gamma)}(\widetilde{A}_4^{(\gamma)})$ следует из $A_2(\widetilde{A}_2)$ (условий равномерной эллиптичности), $A_3^{(\gamma)}(\widetilde{A}_3^{(\gamma)})$ — из $A_3(\widetilde{A}_3)$ при достаточно большом γ.

Условия $A_4^{(\gamma)}$, $\widetilde{A}_4^{(\gamma)}$, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_3^{(\gamma)}$, $A_3^{(\gamma)}$ участвуют в изучении решений, определенных в областях, лежащих в полупространстве $x_n > 0$ и примыкающих к гиперплоскости $x_n = 0$; мы будем использовать такие условия в случае полупространства $x \cdot \nu > 0$, ν — некоторый вектор (будем их обозначать такими же буквами с индексом ν внизу). Для их записи вводятся новые координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, n-я координатная ось направляется по вектору ν, а остальные располагаются в перпендикулярной к ν плоскости так, чтобы все они образовывали ортогональный базис, в новых координатах записываются условия — роль x_n играет ξ_n.

Обозначим через $K \equiv K_{\varphi_2} = \{\zeta;\ |\arg \zeta| \leqslant \varphi_2 < \pi/2 - \varphi_1\}$; $u^+(x) = u(x)$ при $u(x) \in K$, $u^+(x) = 0$, если $u(x) \bar{\in} K$; $u(x) = u^+(x) - u^-(x)$.

$$Ш^+_{a,h} = \{x,\ x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < a^2,\ x_n > h\}; \quad Ш^+_{a,0} \equiv Ш^+_a;$$

$$Ц^{(\varepsilon)}_{R,h} = \{x,\ x'^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < R^2,\ \varepsilon < x_n < h\}; \quad Ц^{(0)}_{R,h} \equiv Ц_{R,h}.$$

Формулируя результаты, мы всюду считаем, что входящие в формулировку постоянные зависят от величин, входящих в предполагаемые условия, и не зависят от изучаемых решений.

2. Леммы. Модельные задачи. Здесь будут изложены основные утверждения, дающие требуемые оценки решений в простейших областях: полушаре, цилиндре малой высоты, следов решения на семействе близких поверхностей. Особо подчеркнем, что, в отличие от ([1]), здесь устанавливается, а не предполагается суммируемость решений вплоть до гра-

ницы (в этом пункте до куска гиперплоскости $x_n=0$). Леммы имеют самостоятельный интерес и приложения, выходящие за пределы тех, которые мы в этой статье излагаем.

Лемма 1 (о трех полушарах). *Выполнены условия* $A_1(\widetilde{A}_1)$ *в* $Ш_2^+$; $A_2(\widetilde{A}_2)$, $A_3(\widetilde{A}_3)$ (*или* $A_5(\widetilde{A}_5)$) *в* $Ш^+_{2,\varepsilon_0}$; $A_4^{(\gamma)}(\widetilde{A}_4^{(\gamma)})$, $A_3^{(\gamma)}(\widetilde{A}_3^{(\gamma)})$ *в* $Ш_2^+\cap\cap\{x_n<\varepsilon_0\}$, $u(x)$ — *слабое решение уравнения* (1′) (*уравнения с сопряженным оператором из условия* A_1). *Тогда для любого* $a\in(1,2)$ *и* $h\in\in(0,1)$ *найдется* $\lambda_1=\lambda_1(a,h)$ *такое, что*

$$\|u\|_{Ш_a;\gamma-m}\leqslant\lambda_1(\|u\|_{Ш^+_{1,h};\gamma-m}+\|u^-\|_{Ш^+_2;\gamma-m}+\|f\|_{Ш^+_2;\gamma}).$$

Лемма 2 (оценка решений в круговом цилиндре малой высоты). *Выполнены условия* $A_1(\widetilde{A}_1)$ в $Ц_{R,1}$; $A_4^{(\gamma)}(\widetilde{A}_4^{(\gamma)})$ $A_3^{(\gamma)}(\widetilde{A}_3^{(\gamma)})$ *в* $Ц_{R,\varepsilon_0}$, $u(x)$ — *слабое решение уравнения* (1′) (*уравнения с сопряженным оператором из условия* $\widetilde{A}_1$). *Тогда для любого* $R_1<R$ *найдутся такие положительные постоянные* $h_1=h_1(R,R-R_1)$, $\lambda_2=\lambda_2(R,R-R_1)$, *что*

$$\|u\|_{Ц_{R_1,h_1};\gamma-m}\leqslant\lambda_2(\|u\|_{Ц^{h_1}_{R,1};0}+\|u^-\|_{Ц_{R,1};\gamma-m}+\|f\|_{Ц_{R,1};\gamma}).$$

Доказательства лемм 1, 2 проводятся с помощью построения семейств допустимых пробных функций $\Phi_\alpha(x)$ для элементарных областей — лунок, полулунок, цилиндров малой высоты, для которых $P^*\Phi_\alpha(x)$ обладают свойством положительности (если выполнены алгебраические условия $A_3^{(\gamma)}(\widetilde{A}_3^{(\gamma)})$, $A_4^{(\gamma)}(\widetilde{A}_4^{(\gamma)})$) и оценок, на основании тождества, $u^+(x)$. Рассуждения весьма близки к изложенным в [1] (см. также [4]).

3. Положительные решения в ограниченных областях. Пусть Ω — ограниченная область с границей $S=\partial\Omega$, принадлежащей классу $C^{(m)}(K_0)$ [2] (стр. 341). Через K обозначим константу (константы), характеризующую границу S, через $\nu(x_0)$ — внутреннюю нормаль к S в точке x_0, через $\Omega_{\varepsilon_0}=\{x;x\in\Omega,\rho(x,S)\leqslant\varepsilon_0\}$ ε_0-окрестность границы S. Используя обычный прием редукции задачи об изучении решения в области с гладкой границей к изучению модельных задач и применяя затем леммы 1 и 2, приходим к следующей основной теореме.

Теорема 1 (о суммируемости положительных решений). *Выполнены условия* $A_1(\widetilde{A}_1)$ *в* Ω, $A_2(\widetilde{A}_2)$, $A_3(\widetilde{A}_3)$ (*или* $A_5(\widetilde{A}_5)$) *в* $\Omega\setminus\Omega_{\frac{1}{2}\varepsilon_0}$; $A^{(\gamma)}_{4,\nu(x_0)}$ $(\widetilde{A}^{(\gamma)}_{4,\nu(x_0)})$, $A^{(\gamma)}_{3,\nu(x_0)}$ $(\widetilde{A}^{(\gamma)}_{3,\nu(x_0)})$ (*или коэффициенты вещественные*), x_0 — *любая точка* S, *в* $\Omega\cap\{x,|x-x_0|<\varepsilon_0\}$ $u(x)$ — *слабое решение уравнения* (1′) (*уравнения с сопряженным оператором из условия* $\widetilde{A}_1$) *в области* Ω. *Тогда для любой подобласти* Ω_1 *области* Ω *найдется постоянная* $C_1=C_1(K,\rho(S,\partial\Omega_1))$ *такая, что*

$$\|u\|_{\Omega;\gamma-m}\leqslant C_1(\|u\|_{\Omega_1;0}+\|u^-\|_{\Omega,\gamma-m}+\|f\|_{\Omega;\gamma}).$$

При $\gamma=m$ теорема 1 утверждает суммируемость по области Ω любых слабых положительных решений однородного уравнения.

Заметим, что для вырождающихся уравнений требуется запись $\widetilde{A}_{1,\nu(x_0)}$ для сопряженного оператора только в окрестности точек $x_0\in S$ (их можно взять конечное число), а в $\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon_0}$ предполагается лишь эллиптичность $\sum\limits_{|k|=m}b_k(x)\sigma^k$ и ограниченность коэффициентов сопряженного оператора.

Приведем еще одно важное следствие из теоремы 1 и результатов Я. А. Ройтберга [3] (все определения и обозначения взяты из [3]).

Теорема 2 (об обобщенном интегральном представлении). *Выполнены условия теоремы* 1, *коэффициенты правильно эллиптического уравнения* $Pu\equiv\sum\limits_{|k|\leqslant m}(-1)^{|k|}D_x^k[a_k(x)u]=0$ *достаточно гладкие. Тогда любое его решение, у которого* $\|u^-\|_{\Omega;\gamma-m}<+\infty$ *в каждой внутренней точке* x *области* Ω *представимо формулой* $u(x)=-\sum\limits_{j=1}^{m/2}\langle u_j,T_{m-j}\overline{R}(x,y)\rangle+$

$+\tilde{u}(x)$; $R(x,y)$ — *функция Грина задачи Дирихле для уравнения* $Pu=0$ (7); T_{m-j} — *дифференциальные операторы (по* y) *порядка* $m-j$, $u_j \in W_p^{s_j}(S)$; $S_j < m-\gamma-(n-1)+(n-1)\frac{1}{p}-j$; $\langle u_j, \cdot\rangle$ — *значение функционала, сосредоточенного на* S; $\tilde{u}(x)$ — *решение однородной задачи Дирихле для уравнения* $Pu=0$. $\tilde{u}(x)$, *в силу сделанных предположений, достаточно гладкая в* $\overline{\Omega}$ *функция.*

4. Уравнение второго порядка. Примеры. Для уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами

$$P_0(x,\sigma)\equiv\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\sigma_i\sigma_j\equiv A(x)\sigma\cdot\sigma;\ P_0^*(x;\theta;\sigma)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\sigma_i\sigma_j+$$

$$+\theta\sum_{i=1}^{n} b_{i0}(x)\,\sigma_i+b_{00}(x)\,\theta^2.$$

В этом случае все условия сводятся к ограниченности коэффициентов и р.э. многочленов $Q_0^{(\gamma)}(x;\sigma)\equiv A(x)\sigma\cdot\sigma-\frac{1}{\gamma}a_{nn}(x)\sigma_n^2$;

$$Q_0^{*(\gamma)}(x;y;\sigma)\equiv\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\sigma_i\sigma_j+\frac{y}{\gamma}\sum_{i=1}^{n-1} b_{i0}(x)\sigma_i\sigma_n+$$

$$+\left[b_{nn}(x)\frac{y^2}{\gamma^2}+b_{n0}(x)\frac{y}{\gamma}-\frac{1}{\gamma}b_{nn}(x)\right]\sigma_n^2\geqslant\delta_\gamma^*>0;\quad |\sigma|=1,\ y\in[0,1].$$

Наилучшим условием $A_{4\nu}^{(\gamma)}$ при всех ν является выполнение неравенства $\sup\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_n(x)}<\frac{1+\sqrt{1-1/\gamma}}{1-\sqrt{1-1/\gamma}}$, $\lambda_1(x)$ — наибольшее, $\lambda_n(x)$ — наименьшее характеристические числа симметрической матрицы $A(x)$.

Легко привести примеры уравнений, для которых условие $\tilde{A}_4^{(\gamma)}$ не только достаточно, но и необходимо для принадлежности положительных решений пространству $L_1^{(\gamma-m)}((0,1))$. Ограничимся самыми простыми: Уравнение $\frac{d^2u}{dx_n^2}-\frac{d}{dx_n}[-(\alpha+1)x_n^{-1}u]+(\alpha+1)x_n^{-2}u=0$; $Q_0^{*(\gamma)}(x_n;y;\sigma_n)=$ $=[\gamma(\gamma-1)-y\gamma(\alpha+1)+y^2(\alpha+1)]\sigma_n^2/\gamma^2\geqslant\delta^*\sigma_n^2$ при $\gamma>1+\alpha$, имеет решение $x_n^{-\alpha}$, а уравнение $\frac{d^2}{dx_n^2}(x_nu)-\frac{d}{dx_n}[-(1+x_n^{-1})u]=0$, $Q_0^{*(\gamma)}(x_n;$ $y;\sigma_n)\equiv\left[x_n\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{1}{\gamma}y\right]\sigma_n^2$ имеет решение e^{1/x_n}. Первое указывает на неулучшаемость теоремы 1 о суммируемости в шкале пространств $L_1^{(\gamma-m)}(\Omega)$, второе — на то, что отказ от условия $\tilde{A}_4$ влечет за собой появление положительных решений с нестепенными (экспоненциальными) особенностями.

Киевский политехнический институт
им. 50-летия Великой Октябрьской социалистической революции

Поступило
8 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, ДАН, 184, № 5 (1969); 189, № 3 (1969); Матем. сборн., 81 (123); 1 (1970). [2] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967. [3] Я. А. Ройтберг, ДАН, 183, № 1 (1969). [4] Т. Г. Плетнева, С. Д. Эйдельман, ДАН, 192, № 3 (1970). [5] Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. [6] Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 19, № 5 (1967). [7] А. С. Маркус, С. Д. Эйдельман, Матем. исследования, 4, 2 (1970).