Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

УДК 62-501.52

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Г. А. СТЕПАНЬЯНЦ, Н. С. ТАРАРОЩЕНКО

О СТРУКТУРЕ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ АСИМПТОТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С НЕУСТОЙЧИВЫМ ОБЪЕКТОМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 22 XII 1969)

Пусть система управления описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат системы; $u = u(x)$ является m-мерной вектор-функцией от координат системы (закон управления) со значениями из множества U, принадлежащей классу D допустимых законов управления такому, что, если некоторый закон управления $u_1(x) \in D$ определен в открытом подмножестве Ω_1 фазового пространства, а $u_2(x) \in D$ в подмножестве Ω_2 (также открытом), то закон управления $u_0(x)$, равный $u_1(x)$ при $x \in \Omega_1$ и $u_2(x)$ при $x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$, также является допустимым: $u_0(x) \in D$. Через $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ здесь обозначено дополнение множества Ω_1 в Ω_2. Будем считать, что n-мерная вектор-функция $f(x, u)$ такова, что система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решения при $u(x) \in D$.

Обозначим $\Omega[u(x)]$ область притяжения (область асимптотической устойчивости) начала координат системы (1) при законе управления $u(x)$. Если начало координат неустойчиво, положим $\Omega = \phi$.

Определение 1. Закон управления $\hat{u}(x)$ назовем оптимальным по устойчивости, если для любого допустимого закона управления $u(x)$ выполняется условие $\Omega[u(x)] \subset \Omega[\hat{u}(x)]$.

Теорема 1. *Среди допустимых законов управления существует оптимальный по устойчивости.*

Доказательство. Докажем, что существует такой закон управления $\hat{u}(x)$, что $\Omega[\hat{u}(x)] = \bigcup\limits_{u \in D} \Omega[u(x)]$. Объединение $\Omega^* = \bigcup\limits_{u \in D} \Omega[u(x)]$ открыто, так как открыто каждое $\Omega[u(x)]$. Фазовое пространство X системы (1) имеет счетную базу, а система множеств $\{\Omega[u]: u \in D\}$ является открытым покрытием $\Omega^* \subset X$ и поэтому содержит не более чем счетное подпокрытие $\Omega_1 = \Omega[u_1(x)]$, $\Omega_2 = \Omega[u_2(x)], \ldots$ Закон управления $\hat{u}(x) = u_i(x)$ при $x \in \Omega_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} \Omega_j$, $i = 1, 2, \ldots$, принадлежит классу D, определен на Ω^* и является оптимальным в смысле определения 1.

Очевидно, в качестве класса допустимых законов управления можно принять класс кусочно-непрерывных, кусочно-постоянных или кусочно-линейных по каждой координате функций.

Пусть существует невырожденное линейное преобразование с матрицей J координат системы, приводящее систему (1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}^+ &= f^+(y^+, u), \quad (\text{А}) \\ \dot{y}^- &= f^-(y^+, y^-, u), \quad (\text{Б}) \end{aligned} \tag{2}$$

где $y = (y^+, y^-) = Jx$, $x = J^{-1}y$, а f^+, f^- — соответственно k- и $(n-k)$-мерные вектор-функции.

В случае, если закон управления $u(y)$ зависит только от вектора y^+, $u(y) = u(y^+)$, то уравнение (2А) можно рассматривать, как уравнение некоторой динамической системы k-го порядка, фазовое пространство которой обозначим через Y^+. С другой стороны, уравнение (2Б) при $y^+ = 0$ и $u(y) = u(y^-)$ может рассматриваться как уравнение динамической системы $(n-k)$-го порядка, фазовое пространство которой обозначим через Y^-. Очевидно, фазовое пространство Y системы (2) равно топологическому произведению пространств Y^+ и Y^-: $Y = Y^+ \times Y^-$. Эти динамические системы будем называть подсистемами системы (2).

При принятых соглашениях имеет место следующая теорема, которая позволяет свести задачу синтеза оптимального по устойчивости управления системой (2) к синтезу закона управления системой более низкого порядка.

Теорема 2. *Пусть для системы* (2) *выполняются следующие условия:*

1. *Существует оптимальный по устойчивости закон управления* $\hat{u}_+$ *подсистемой* (А), *приводящий любую точку* $y^+ \in \Omega^+[u(y^+)] \subset Y^+$ *в начало координат фазового пространства* Y^+ *за конечное время.*

2. *Подсистема* (2Б) *системы* (2) *асимптотически устойчива при* $u = 0$ *и* $y^+ = 0$, *так что для любых начальных условий* $y^- \in Y^-$ *всегда* $\lim\limits_{t\to\infty} y^-(t) = 0$.

Тогда область асимптотической устойчивости $\Omega[\hat{u}(y)]$, *соответствующая оптимальному по устойчивости управлению системой* (2), *равна* $\Omega[\hat{u}(y)] = \Omega^+[\hat{u}_+(y^+)] \times Y^-$.

Доказательство. По условию, если $y \in \Omega[\hat{u}]$, то $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} y^+(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} y^-(t) = 0$, где векторы $y^+ = \mathrm{Pr}_{Y^+} y$, $y^- = \mathrm{Pr}_{Y^-} y$ — проекции вектора y на фазовые пространства Y^+ и Y^- подсистем (2А) и (2Б) соответственно, так что если $y \in \Omega[\hat{u}]$, то $y^+ \in \Omega^+[\hat{u}_+]$ и, следовательно, $\Omega[\hat{u}(y)] \subset \Omega^+[\hat{u}_+(y^+)] \times Y^-$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что существует такой закон управления $u_0(y)$, что $\Omega[u_0(y)] = \Omega^+[\hat{u}_+(y^+)] \times Y^-$.

Если $\hat{u}_+(y^+)$ — оптимальный по устойчивости закон управления, приводящий любую точку $y^+ \in \Omega^+[\hat{u}_+(y^+)]$ в начало координат за конечное время, то положим

$$u_0(y) = \begin{cases} \hat{u}_+(y^+) & \text{при } y^+ \neq 0, \\ 0 & \text{при } y^+ = 0. \end{cases}$$

Ввиду особенностей системы (2Б) $\lim\limits_{t\to\infty} y^-(t) = 0$ при $u = u_0(y)$ и любых начальных фазовых состояниях y, при которых $y^+ \in \Omega[\hat{u}_+]$.

Если подсистему (2А) назвать неустойчивой частью системы (2), то полученный результат означает, что для обеспечения устойчивости системы (2) достаточно оптимальным образом управлять ее неустойчивой частью. Оптимальный закон управления системой (1) при этом равен $\hat{u}(x) = u_0(Jx)$.

Пример 1. Пусть система (1) является линейной системой вида

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где A и B — постоянные матрицы, а U — выпуклый замкнутый многогранник, причем выполняется условие общности положения ([1]), а корни характеристического многочлена матрицы A действительны и различны.

В качестве J выберем матрицу преобразования, приводящего A к канонической форме Жордана. Тогда уравнение (2А) примет вид

$$\dot{y}^+ = A^+y^+ + B^+u,$$

где A^+ — диагональная матрица с неотрицательными элементами.

В качестве оптимального по устойчивости закона управления $\hat{u}_+(y^+)$ можно взять закон управления, соответствующий оптимальному по быстродействию управлению, которое существует всегда, когда существует хотя бы одно управление, приводящее точку y^+ в начало координат ([1]).

Фазовому пространству Y^- будет при этом соответствовать некоторое линейное многообразие X^- в фазовом пространстве системы (1) такое, что для любых начальных состояний $x \in X^-$ и при $u(x) = 0$ всегда $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Пример 2. Неустойчивая нелинейная система второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + b_1 u,$$
$$\dot{x}_2 = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + b_2 u,$$

где $\alpha_1 \neq \alpha_2$, а $f(z)$ — такая нелинейная функция, что $zf(z) > 0$ при $z \neq 0$, линейным преобразованием $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ приводится к виду

$$\dot{y}_1 = y_1 + (b_1 + b_2) u,$$
$$\dot{y}_2 = \alpha_1 y_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) f(y_2) + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) u.$$

При $\alpha_1 > \alpha_2$ нелинейная система первого порядка $\dot{y}_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) f(y_2)$ является асимптотически устойчивой, так что преобразованная система удовлетворяет условиям теоремы 2. Если управление ограничено по модулю, $|u| \leqslant c$, то в качестве оптимального по устойчивости управления может быть принято $u = -c \operatorname{sgn}[(b_1 + b_2) y_1]$ или, что то же, $u = -c \operatorname{sgn}[(b_1 + b_2)(x_1 + x_2)]$.

Московский авиационный институт
им. Серго Орджоникидзе

Поступило
17 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, «Наука», 1966.