Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

УДК 511 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ТАРТАКОВСКИЙ

РАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЕДИНИЦЫ БИНАРНОЙ ФОРМОЙ СТЕПЕНИ $n \geqslant 3$

(Представлено академиком Ю. В. Линником 22 I 1970)

Пусть Z — множество всех целых чисел; $F_n(x, y)$ — бинарная форма n-й степени от x и y над Z; $\Phi(F_n)$ — количество решений в целых числах x и y неопределенного уравнения:

$$F_n(x, y) \equiv a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k}y^k + \ldots + a_ny^n = 1, \quad \text{где } a_0, \ldots, a_n \in Z. \quad (1)$$

Для случая неприводимости в Z формы F_n о величине $\Phi(F_n)$ известно следующее. А. Туэ ([1]) доказал, что при $n \geqslant 3$ $\Phi(F_n)$ конечно; используя его метод, можно найти эффективную оценку сверху величины $\Phi(F_n)$ для каждой конкретной формы F_n (см., например, ([2]), § 60, написанный автором этой статьи). Однако оценка эта является функцией от коэффициентов формы F_n и не порождает единой общей численной верхней границы для всех $\Phi(F_n)$ в совокупности при данном n. Установленная А. Бейкером эффективная оценка координат x и y самих решений не изменила положения в вопросе о числе решений.

Между тем, Б. Н. Делоне ([2, 4, 5]) доказал, что для всех неприводимых в Z кубических форм F_3 с дискриминантом $\Delta(F_3) < 0$ число решений уравнения (1) имеет общую для всех этих форм конечную верхнюю границу, равную 5. Для кубических форм при $\Delta(F_3) > 0$ К. Л. Зигель ([6]) установил аналогичную оценку, равную 18, для всех таких форм, дискриминант которых превосходит некоторую константу C. Д. К. Фаддеев (см. в ([2]) написанный им § 70) понизил эту оценку с 18 до 15, а для константы C сообщил приближенное значение, равное 10^{33}. Так как форм F_3 с положительным дискриминантом, меньшим чем C, конечное число, то для них описанным выше способом можно установить общую верхнюю границу для числа решений уравнения (1) при $n = 3$. Поэтому существует конечная общая граница для $\Phi(F_3)$ при всех F_3, неприводимых в Z, хотя граница эта до сих пор никем не была вычислена. Настоящая работа имеет своей целью установить, что за вычетом тривиальных и очевидных исключений такая общая верхняя граница для $\Phi(F_n)$ существует для всех F_n при фиксированном n, большем чем 3.

Теорема 1. *Количество $\Phi(F_n)$ целочисленных представлений единицы каждой неприводимой в Z бинарной формой $F_n(x, y)$ над Z при фиксированной степени n, большей чем 3, удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(F_n) \leqslant \varphi(n) = 235\, n^6. \quad (2)$$

Из этой основной теоремы легко выводится:

Теорема 2. *Если бинарная форма $F_n(x, y)$ над Z фиксированной степени n при $n \geqslant 3$ не является степенью линейной или неопределенной квадратичной формы $f(x, y)$ над Z, целочисленно представляющей единицу, то количество $\Phi(F_n)$ целочисленных представлений единицы этой формой F_n ограничено сверху как в теореме* 1 (*см.* (2)).

Оценка $235\, n^6$ для $\varphi(n)$ может быть различными способами существенно уменьшена. Однако заменить $\varphi(n)$ абсолютной константой, не зависящей от n, очевидно, нельзя.

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступило 16 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Thue, Videnskabs — selskabetes skrifter, Math.-naturv., 1, 7, 1 (1908). [2] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, Тр. Матем. инст. АН СССР, 11 (1940). [3] A. Baker, Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A, 263, 1139, 173 (1968). [4] B. Delaunay, C. R., 171, 336 (1920). [5] Б. Н. Делоне, Изв. Российск. Ак. наук, 6 сер., 16, 253 (1922). [6] C. L. Siegel, Abh. der preuss. Akad. der Wiss., 1 (1929).