Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

МАТЕМАТИКА

В. ТУЧКЕ (Берлин, ГДР)

ТЕОРЕМА ГАРТОГСА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 30 I 1970)

Пусть G — открытое множество n-мерного комплексного пространства C^n. В множестве G рассматривается следующая система уравнений с частными комплексными производными (см. [3]):

$$\partial w / \partial z_j^* = f_j w \tag{1}$$

или

$$\partial w / \partial z_j = f_j w \tag{2}$$

$(j = 1, \ldots, n)$. Мы предполагаем, что:

1°. Функции $\mathrm{Re}\,[f_j]$ и $\mathrm{Im}\,[f_j]$ можно (локально) представить в виде степенных рядов.

2°. $\partial f_j / \partial z_k^* = \partial f_k / \partial z_j^*$, $\forall j$, $\forall k$, в случае (1) или $\partial f_j / \partial z_k = \partial f_k / \partial z_j$, $\forall j$, $\forall k$, в случае (2).

О решениях $w = w(z_1, \ldots, z_n)$ мы предположим:

1°. Если $(z_1^0, \ldots, z_n^0) \in G$, то пусть G_k, $k = 1, \ldots, n$ — пересечение множества G с плоскостью

$$\{(z_1, \ldots, z_n);\ z_1 = z_1^0, \ldots, z_{k-1} = z_{k-1}^0,\ z_{k+1} = z_{k+1}^0, \ldots, z_n = z_n^0\}.$$

В множестве G_k рассмотрим функцию g, определенную следующим образом:

$$g(z_k) = w(z_1^0, \ldots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \ldots, z_n^0).$$

Считаем, что g обладает частными комплексными производными относительно z_k^* (или в случае (2) относительно z_k) в слабом смысле. Это значит (см. [4]), что существуют комплексные числа $\partial w(z_1^0, \ldots, z_n^0) / \partial z_k^*$ или $\partial w(z_1^0, \ldots, z_n^0) / \partial z_k$, от которых величины $\int\limits_{\partial B} g(z_k)\, dz_k / 2i\,\mathrm{m}B$ или $\int\limits_{\partial B} g(z_k)\, dz_k^* / -2i\,\mathrm{m}B$ отличаются произвольно мало, если $B (\subset G_k)$ расположено в достаточно малой окружности точки z_k^0 ($\mathrm{m}B$ — мера множества B) *.

2°. В каждой точке множества G функция w и ее производная в слабом смысле (см. 1°) удовлетворяют системе (1) или (2).

Решение системы (1) или (2) с этими свойствами называется слабым решением.

Теорема 1. *Если w — слабое решение системы (1) или (2), то w — непрерывная функция в G. Кроме того, w можно представить в виде степенного ряда (переменные этого ряда x_j и y_j, $j = 1, \ldots, n$). Производную в слабом смысле можно понимать в классическом смысле.*

---

* Достаточно рассматривать такие области B, для которых $\mathrm{Int}\, B$ односвязно. Кроме того, мы рассматриваем только такие B, для которых теорема Остроградского — Гаусса правильна.

Доказательство. Пусть

$$\omega(x_1^0 + iy_1, \ldots, x_n^0 + iy_n) = 0,$$

и ω в случае (1) — решение системы

$$\partial\omega/\partial z_j^* = f_j \tag{3}$$

или в случае (2) решение системы

$$\partial\omega\,/\,\partial z_j = f_j \tag{4}$$

(см. ([3])). Функции Re $[\omega]$, In $[\omega]$ можно представить в виде степенных рядов. Поэтому частные комплексные производные $\partial\omega\,/\,\partial z_j^*$ и $\partial\omega\,/\,\partial z_j$ существуют в классическом смысле:

$$\partial\omega\,/\,\partial z_j^* = {}^1/_2(\partial\omega\,/\,\partial x_j + i\partial\omega\,/\,\partial y_j),$$

$$\partial\omega\,/\,\partial z_j = {}^1/_2(\partial\omega\,/\,\partial x_j - i\partial\omega\,/\,\partial y_j).$$

Если производные в классическом смысле существуют, то производные в слабом смысле тоже существуют и равны классическим производным. Если h_1, h_2 обладают производными в слабом смысле, то $h_1{}^0h_2$ тоже обладает производными в слабом смысле; $h_1{}^0h_2$ дифференцируемо в слабом смысле, если h_2 дифференцируемо в слабом смысле и h_1 голоморфно. В этом случае справедливо обыкновенное правило дифференцирования сложных функций (см. ([4])).

В частности,

$$\Phi = w\exp(-\omega)$$

дифференцируемо в слабом смысле:

$$\partial\Phi/\partial z_j^* = \exp(-\,\omega)\,(\partial w/\partial z_j^* - w\,\partial\omega/\partial z_j^*) = \exp(-\,\omega)\,(f_jw - wf_j) = 0$$

или (в случае (2))

$$\partial\Phi/\partial z_j = \exp(-\,\omega)\,(\partial w/\partial z_j^* - w\,\partial\omega/\partial z_j^*) = \exp(-\,\omega)\,(f_jw - wf_j) = 0.$$

Если $\partial\Phi\,/\,\partial z_k^* = 0$ в каждой точке множества G_k, то Φ — голоморфная функция в G_k (см. ([4])). Если Φ удовлетворяет всем уравнениям $\partial\Phi\,/\,\partial z_k^* = 0$, $\forall k = 1, \ldots, n$, то Φ, по теореме Гартогса (см. ([1])),— непрерывная функция в множестве G и ее можно (локально) представить в виде степенного ряда (относительно x_j, y_j, $j = 1, \ldots, n$). С помощью функций $\tilde{z}_k = z_k^*$ можно получить производную $\partial\,/\,\partial z_k$ из производной $\partial\,/\,\partial\tilde{z}_k^*$. Поэтому мы получаем: если $\partial\Phi\,/\,\partial z_k = 0$, $\forall k = 1, \ldots, n$, то функция Φ непрерывна, и ее можно представить в виде степенного ряда (относительно x_j, y_j, $j = 1, \ldots, n$). Из $w = \Phi\exp\omega$ следует в обоих случаях, что Φ — непрерывная функция, и что Φ можно (локально) представить в виде степенного ряда. Теорема доказана.

Если функции f_j обладают компактными носителями, то существуют (см. ([2])) решение уравнения (3) или (4) при предположении 2° и что f_j обладают непрерывными частными производными первого порядка. В этом случае справедлива

Теорема 2. *Слабое решение системы* (1) *или* (2) *непрерывно и обладает непрерывными частными производными первого порядка. Из этого следует, в частности, что производные в слабом смысле можно понимать в классическом смысле.*

Поступило
14 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих переменных, Изд. 2-е, М., 1962. [2] Л. Хёрмандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., 1968. [3] W. Tutschke, Sitzunsber. Sächs. Akad. Wiss., 108, H. 5 (1969). [4] И. Н. Векуа, Матем. сборн., 31, (73), № 2, 217 (1952).