УДК 539.12.01

В.Н. КАПШАЙ, С.И. ФИАЛКА

РЕШЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ДВУХЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОРБИТАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

Рассмотрены связанные состояния релятивистских систем двух частиц в специальном случае оператора взаимодействия, который допускает сведение парциальных интегральных уравнений к дифференциальным непосредственно в импульсном представлении. Получены точные аналитические решения этих уравнений при некоторых значениях энергии (массы) системы двух частиц. Уравнения с другими энергиями решены численно. Найдены зависимости спектров масс двухчастичных систем и волновых функций от параметров.

Ключевые слова*: релятивистская двухчастичная система, связанное состояние, парциальное разложение, задача Штурма – Лиувилля.*

Введение

Хорошо известны успехи квазипотенциального подхода в описании релятивистских составных систем частиц [1]. Уравнения квазипотенциального типа в квантовой теории поля исходно были получены [2, 3] в импульсном представлении в виде интегральных и являются релятивистским обобщением уравнений Шрёдингера и Липпмана – Швингера. Аналогом перехода в координатное представление квантовой механики является переход в так называемое релятивистское конфигурационное представление. Математически он означает разложение всех величин теории по полной ортонормированной системе функций – матричным элементам основной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца, являющейся группой движений в импульсном пространстве Лобачевского [4]. Однако при переходе к этому представлению задача упрощается мало, так как при этом уравнения остаются интегральными или принимают вид дифференциально-разностных уравнений.

В рассматриваемом подходе взаимодействия между релятивистскими частицами задаются с помощью интегрального оператора. При феноменологическом описании взаимодействий интегральные операторы можно строить путём прямого геометрического обобщения нерелятивистских потенциалов, задаваемых в импульсном представлении, переходя от евклидовой геометрии трехмерного импульсного пространства к геометрии Лобачевского. Особый интерес представляют такие операторы взаимодействия, для которых оказывается возможным сведение интегральных уравнений к дифференциальным непосредственно в импульсном представлении. В таких случаях для нахождения волновых функций можно, разумеется, использовать различные методы решения интегральных уравнений, но появляется и дополнительная возможность использования специальных методов решения дифференциальных уравнений. Некоторые операторы такого типа рассматривались в [5–8].

В данной работе исследуется потенциал, который в релятивистском конфигурационном представлении имеет вид $V(r) = -\lambda / (r^2 + a^2)$. Показано, что в импульсном представлении для такого потенциала парциальные интегральные уравнения с произвольным орбитальным моментом могут быть сведены к дифференциальным. Для парциальных волновых функций в импульсном представлении найдены также граничные условия в нуле и на бесконечности. При некоторых энергиях полученная при этом задача Штурма – Лиувилля решена точно аналитически. При всех энергиях эта задача исследована численно для различных орбитальных моментов.

Интегральные парциальные уравнения в импульсном представлении

Интегральные квазипотенциальные уравнения квантовой теории поля для связанных состояний систем двух релятивистских бесспиновых частиц массы m в импульсном представлении могут быть записаны в виде [8]

$$G_0^{-1}(E,E_p)\psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\int V(E,\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})\psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k})\frac{m}{E_k}d\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Здесь $\psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ – волновая функция относительного движения частиц; $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{k}$ – начальный и конечный относительные импульсы в системе центра инерции; $E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ и $E_k=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$ – начальная и конечная энергии частиц; $2E=2\sqrt{\boldsymbol{q}^2+m^2}$ – энергия (масса) двухчастичной системы ($0\le 2E\le 2m$). Различным вариантам квазипотенциального подхода соответствуют разные свободные функции Грина $G_{0,j}(E,E_p)$, из которых мы рассмотрим

$$\begin{aligned} G_{0,1}(E,E_p)&=\frac{1}{E^2-E_p^2}, \qquad G_{0,2}(E,E_p)=\frac{1}{E_p\left(E-E_p\right)},\\ G_{0,3}(E,E_p)&=\frac{E_p/m}{E^2-E_p^2}, \qquad G_{0,4}(E,E_p)=\frac{1/m}{E-E_p}, \end{aligned} \tag{2}$$

соответствующие уравнению Логунова – Тавхелидзе ($j=1$), уравнению Кадышевского ($j=2$) и их модифицированным версиям ($j=3$, $j=4$). В качестве оператора взаимодействия $V(E,\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})$ рассмотрим не зависящий от энергии E локальный в импульсном пространстве Лобачевского потенциал вида [5]

$$V\left((\Delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}})^2\right)=-\frac{\lambda}{4\pi}\frac{e^{-am\chi_\Delta}}{\left|\Delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}\right|}=-\frac{\lambda m^{2am+1}}{4\pi}\frac{\left(m\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}+\sqrt{\left(m\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}\right)^2-m^4}\right)^{-am}}{\sqrt{\left(m\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}\right)^2-m^4}}, \tag{3}$$

где разность векторов в пространстве Лобачевского $\Delta_{p,k}$, соответствующая ей компонента $\Delta^0_{p,k}$ и быстрота χ_Δ определяются выражениями

$$\Delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{p}(-)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{k}}{m}\left[E_p-\frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}}{E_k+m}\right],$$

$$\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}=\sqrt{(\Delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}})^2+m^2}=\left(E_p E_k-\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}\right)\Big/m,$$

$$\chi_\Delta=\mathrm{Arcosh}\left(\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}\Big/m\right).$$

В релятивистском конфигурационном представлении потенциалу (3) соответствует потенциал $V(r)=-\lambda\big/(r^2+a^2)$. Точные решения квазипотенциальных уравнений с этим потенциалом для состояний с нулевым орбитальным моментом были найдены в работе [5].

Проблема нахождения решений трехмерных квазипотенциальных уравнений с лобачевско-локальными потенциалами может быть упрощена путём сведения уравнений к одномерным посредством разложений по сферическим гармоникам волновой функции и потенциала:

$$\psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\frac{4\pi}{q\,p}\sum_{l,\mu}\psi_\ell(E,p)Y_l^\mu(\boldsymbol{n}_p)Y_l^{\mu*}(\boldsymbol{n}_q); \tag{4}$$

$$V\left((\Delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}})^2\right)=\frac{1}{q\,p}\sum_{l,\mu}V_\ell(p,k)Y_l^\mu(\boldsymbol{n}_p)Y_l^{\mu*}(\boldsymbol{n}_k). \tag{5}$$

Подставляя разложения (4) и (5) в уравнение (1), интегрируя по углам вектора $\boldsymbol{k}$ и принимая во внимание ортонормированность и полноту системы сферических гармоник, получим одномерные парциальные уравнения в импульсном представлении:

$$G_0^{-1}(E,E_p)\psi_l(E,p)=m\int_0^\infty V_l(p,k)\psi_l(E,k)\frac{dk}{E_k}, \tag{6}$$

где парциальные потенциалы, согласно (5), имеют вид

$$V_l(p,k)=2\pi pk\int_{-1}^{1}V\left((\Delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}})^2\right)P_l(\cos\theta_{pk})\,d\theta_{pk}. \tag{7}$$

Подставляя (3) в (7), получим

$$V_l(p,k)=-pk\frac{\lambda m^{2am+1}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(m\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}+\sqrt{\left(m\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}\right)^2-m^4}\right)^{-am}}{\sqrt{\left(m\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}\right)^2-m^4}}P_l(\cos\theta_{pk})\,d\cos\theta_{pk}. \tag{8}$$

Введем обозначения $\alpha=E_pE_k-pk$, $\beta=E_pE_k+pk$ и сделаем в (8) замену переменной интегрирования $y=m\Delta^0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}=E_pE_k-pk\cos\theta_{pk}$:

$$V_l(p,k)=-\lambda m\,\tilde{g}_l(p,k),$$

где

$$\tilde{g}_l(p,k)=\frac{m^{2am}}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left(y+\sqrt{y^2-m^4}\right)^{-am}}{\sqrt{y^2-m^4}}P_l\left(\frac{\beta+\alpha-2y}{\beta-\alpha}\right)dy. \tag{9}$$

Введем параметризацию $p=m\,\mathrm{sh}\chi_p$, $k=m\,\mathrm{sh}\chi_k$, где χ_p, χ_k – быстроты, и обозначения $\tilde{g}_l(p,k)=g_l(\chi_p,\chi_k)$, $\phi_l(E,\chi_p)=G_0^{-1}(E,E_p)\psi_l(E,p)$. Тогда парциальные уравнения (6) примут вид

$$\phi_l(E,\chi_p)=-\lambda m^2\int_0^{\infty}g_l(\chi_p,\chi_k)\;G_0(E,m\,\mathrm{ch}\chi_k)\;\phi_l(E,\chi_k)\,d\chi_k. \tag{10}$$

Тем самым получены одномерные парциальные интегральные уравнения в терминах быстрот.

Дифференциальные парциальные уравнения в импульсном представлении

Далее необходимо отыскать явный вид ядер интегральных уравнений (10), для чего нужно вычислить интеграл (9). Производя вычисления для частных значений *l*, получим (при $\chi_k\ge\chi_p$)

$$g_0(\chi_p,\chi_k)=\frac{1}{am}e^{-am\chi_k}\,\mathrm{sh}(am\chi_p);$$

$$g_1(\chi_p,\chi_k)=-\frac{1}{am(a^2m^2-1)}e^{-am\chi_k}\left[\mathrm{cth}\chi_k+am\right]\left[\mathrm{sh}(am\chi_p)\left(\mathrm{cth}\,\chi_p\right)-\mathrm{ch}(am\chi_p)\,am\right];$$

$$g_2(\chi_p,\chi_k)=\frac{1}{am(a^2m^2-1)(a^2m^2-4)}e^{-am\chi_k}\left[\left(3\mathrm{cth}^2\chi_k-1+a^2m^2\right)+am\left(3\mathrm{cth}\chi_k\right)\right]\times$$
$$\times\left[\mathrm{sh}(am\chi_p)\left(3\mathrm{cth}^2\chi_p-1+a^2m^2\right)-\mathrm{ch}(am\chi_p)\,am\left(3\mathrm{cth}\chi_p\right)\right];$$

$$g_3(\chi_p,\chi_k)=-\frac{1}{am(a^2m^2-1)(a^2m^2-4)(a^2m^2-9)}\times$$
$$\times e^{-am\chi_k}\left[\left(15\mathrm{cth}^3\chi_k-9\,\mathrm{cth}\chi_k+6a^2m^2\,\mathrm{cth}\chi_k\right)+am\left(15\mathrm{cth}^2\chi_k-4+a^2m^2\right)\right]\times \tag{11}$$
$$\times\left[\mathrm{sh}(am\chi_p)\left(15\mathrm{cth}^3\chi_p-9\,\mathrm{cth}\chi_p+6a^2m^2\,\mathrm{cth}\chi_p\right)-\mathrm{ch}(am\chi_p)\,am\left(15\mathrm{cth}^2\chi_p-4+a^2m^2\right)\right].$$

При $\chi_k\le\chi_p$ ответы отличаются от (15) заменой $\chi_k\leftrightarrow\chi_p$.

Как видно из (15), при каждом значении *l* функция $g_l(\chi_p,\chi_k)$ содержит два повторяющихся многочлена – некоторые функции одной переменной чётные по параметру *a*. Обозначив эти функции как $A_l(\chi)$ и $B_l(\chi)$, выпишем общую формулу (при $\chi_k\ge\chi_p$):

$$g_l(\chi_p,\chi_k)=(-1)^l\frac{\Gamma(am-l)}{\Gamma(am+l+1)}e^{-am\chi_k}\left[A_l(\chi_k)+amB_l(\chi_k)\right]\times$$
$$\times\left[\operatorname{sh}(am\chi_p)\,A_l(\chi_p)-\operatorname{ch}(am\chi_p)\,amB_l(\chi_p)\right]$$

или

$$g_l(\chi_p,\chi_k)=\frac{(-1)^l}{2}\frac{\Gamma(am-l)}{\Gamma(am+l+1)}e^{-am\chi_k}\left[A_l(\chi_k)+amB_l(\chi_k)\right]\times$$
$$\times\left[e^{am\chi_p}\left(A_l(\chi_p)-amB_l(\chi_p)\right)-e^{-am\chi_p}\left(A_l(\chi_p)+amB_l(\chi_p)\right)\right]. \tag{12}$$

Представив выражение $A_l(\chi)+amB_l(\chi)$ для частных значений l в виде слагаемых с множителем $[(1-\operatorname{cth}\chi)/2]^n$, мы получили общую формулу на основе гипергеометрической функции [11]:

$$A_0(\chi)+amB_0(\chi)=1;$$
$$A_1(\chi)+amB_1(\chi)=1+am-2\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2};$$
$$A_2(\chi)+amB_2(\chi)=(1+am)(2+am)+(-6)(2+am)\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}+12\left(\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}\right)^2;$$
$$A_3(\chi)+amB_3(\chi)=(1+am)(2+am)(3+am)+(-12)(2+am)(3+am)\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}+$$
$$+60(3+am)\left(\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}\right)^2+(-120)\left(\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}\right)^3;$$

. . . .

$$A_l(\chi)+amB_l(\chi)=$$
$$=(1+am)(2+am)\cdot\ldots\cdot(l+am)\left[1+\frac{-l(1+l)}{(1+am)}\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}+\frac{-l(-l+1)(1+l)(2+l)}{(1+am)(2+am)2}\left(\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{-l(-l+1)\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot(1+l)(2+l)\cdot\ldots\cdot(2l)}{(1+am)(2+am)\cdot\ldots\cdot(l+am)\cdot l!}\left(\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}\right)^l\right]= \tag{13}$$
$$=\frac{\Gamma(am+l+1)}{\Gamma(1+am)}\,{}_2F_1\left(-l;1+l;1+am;\frac{1-\operatorname{cth}\chi}{2}\right).$$

Похожим образом выражаются присоединённые функции Лежандра первого рода [10]:

$$P_l^{\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-l;1+l;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right). \tag{14}$$

Учитывая (13), а также чётность функций $A_l(\chi)$ и $B_l(\chi)$ по параметру a, из (14) получим

$$P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi)=\frac{1}{\Gamma(am+l+1)}e^{-am\chi}\left[A_l(\chi)+amB_l(\chi)\right]; \tag{15}$$

$$P_l^{am}(\operatorname{cth}\chi)=\frac{1}{\Gamma(-am+l+1)}e^{am\chi}\left[A_l(\chi)-amB_l(\chi)\right]. \tag{16}$$

Подставляя (15), (16) в (12) и учитывая, что присоединённые функции Лежандра второго рода можно записать в виде [10]

$$Q_l^{\mu}(z)=\frac{\pi}{2}\frac{e^{i\mu\pi}}{\sin(\mu\pi)}\left(P_l^{\mu}(z)-\frac{\Gamma(l+\mu+1)}{\Gamma(l-\mu+1)}P_l^{-\mu}(z)\right),$$

а также учитывая свойства гамма-функций [11], окончательно получим

$$g_l(\chi_p,\chi_k)=e^{-iam\pi}\begin{cases}P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_k)Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_p), & \chi_k\ge\chi_p,\\ P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_p)Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_k), & \chi_k\le\chi_p.\end{cases} \tag{17}$$

Подставляя (17) в уравнения (10) и производя дифференцирование по параметру χ_p, получим

$$\begin{aligned}\phi_l(E,\chi_p)=-\lambda m^2e^{-iam\pi}\Bigg[&\int_{\chi_p}^{\infty}P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_k)Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_p)\,G_0(E,m\operatorname{ch}\chi_k)\,\phi_l(E,\chi_k)d\chi_k+\\&+\int_0^{\chi_p}P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_p)Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_k)\,G_0(E,m\operatorname{ch}\chi_k)\,\phi_l(E,\chi_k)d\chi_k\Bigg];\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_l(E,\chi_p)}{d\chi_p}=-\lambda m^2e^{-iam\pi}\Bigg[&\int_{\chi_p}^{\infty}P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_k)\frac{dQ_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_p)}{d\chi_p}\,G_0(E,m\operatorname{ch}\chi_k)\,\phi_l(E,\chi_k)d\chi_k+\\&+\int_0^{\chi_p}\frac{dP_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_p)}{d\chi_p}Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_k)\,G_0(E,m\operatorname{ch}\chi_k)\,\phi_l(E,\chi_k)d\chi_k\Bigg];\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi_l(E,\chi_p)}{d\chi_p^2}=-\lambda m^2e^{-iam\pi}\Bigg[&\int_{\chi_p}^{\infty}P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_k)\frac{d^2Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_p)}{d\chi_p^2}\,G_0(E,m\operatorname{ch}\chi_k)\,\phi_l(E,\chi_k)d\chi_k+\\&+\int_0^{\chi_p}\frac{d^2P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_p)}{d\chi_p^2}\,Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_k)\,G_0(E,m\operatorname{ch}\chi_k)\,\phi_l(E,\chi_k)d\chi_k-\\&-\left(P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_p)\frac{dQ_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_p)}{d\chi_p}-\frac{dP_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi_p)}{d\chi_p}\,Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi_p)\right)G_0(E,m\operatorname{ch}\chi_p)\,\phi_l(E,\chi_p)\Bigg].\end{aligned} \tag{20}$$

В то же время уравнение Лежандра, определитель Вронского и асимптотические свойства для функций Лежандра [10] при замене переменной на $\operatorname{cth}\chi$ имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi)}{d\chi^2}&=\left(a^2m^2+\frac{l(l+1)}{\operatorname{sh}^2\chi}\right)P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi);\\ \frac{d^2Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi)}{d\chi^2}&=\left(a^2m^2+\frac{l(l+1)}{\operatorname{sh}^2\chi}\right)Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi);\end{aligned} \tag{21}$$

$$P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi)\frac{dQ_l^{am}(\operatorname{cth}\chi)}{d\chi}-\frac{dP_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi)}{d\chi}\,Q_l^{am}(\operatorname{cth}\chi)=e^{-iam\pi}; \tag{22}$$

$$\lim_{\chi\to0}P_l^{-am}(\operatorname{cth}\chi)=0,\qquad \lim_{\chi\to\infty}\frac{dQ_l^{am}(\operatorname{cth}\chi)}{d\chi}=0. \tag{23}$$

Учитывая (21), (22) в (20), дифференциальные парциальные уравнения сведём к виду

$$\frac{d^2\phi_l(E,\chi_p)}{d\chi_p^2}-\left(a^2m^2+\frac{l(l+1)}{\operatorname{sh}^2\chi_p}+\lambda m^2\,G_0(E,m\operatorname{csh}\chi_p)\right)\phi_l(E,\chi_p)=0. \tag{24}$$

Учитывая асимптотическое поведение функций Лежандра (23), из (18) и (19) получим граничные условия:

$$\phi_l(E,\chi_p)\Big|_{\chi_p\to0}=0,\qquad \frac{d\phi_l(E,\chi_p)}{d\chi_p}\Bigg|_{\chi_p\to\infty}=0. \tag{25}$$

Задача нахождения решений дифференциальных уравнений (24) с граничными условиями (25) аналогична (но не тождественна) задаче для нерелятивистских парциальных уравнений Шрёдингера в координатном пространстве. При этом меняется физический смысл величин. Аналогом нерелятивистской координаты r выступает быстрота χ_p, аналогом нерелятивистского потенциала является функция $\lambda m^2 G_0(E, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p)$, одна и та же для всех значений l. Аналогом нерелятивистской энергии является параметр $-a^2m^2$, константа λ характеризует интенсивность взаимодействия в обоих случаях. Имеются, однако, и существенные отличия задачи (24), (25) от нерелятивистского парциального уравнения Шрёдингера. Так, вместо нерелятивистского центробежного потенциала $l(l+1)/r^2$ в (24) имеем выражение $l(l+1)/\mathrm{sh}^2\,\chi_p$, а второе из граничных условий (25) отличается от нерелятивистского.

В (24), (25) при каждом значении орбитального момента l содержатся три параметра: константа связи λ, энергия двухчастичной системы E и не указанный явно параметр потенциала a. Если зафиксированы параметры λ и E, то такая задача является задачей Штурма – Лиувилля [7]. При этом решения $\phi_l(a_{(i)}, \lambda; E, \chi_p)$, соответствующие различным собственным значениям «нерелятивистской энергии» $-a^2m^2$, удовлетворяют обычному условию ортогональности

$$\int_0^\infty \phi_l(a_{(i)}, \lambda; E, \chi_p)\phi_l(a_{(j)}, \lambda; E, \chi_p)\,d\chi_p = 0, \qquad a_{(i)} \neq a_{(j)}.$$

Если же в (24), (25) фиксированы параметры a и E, то эта задача Штурма – Лиувилля имеет решения только при некоторых собственных значениях λ ($\lambda_l^{(n)}(E,a)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$). Рассматривая уравнения (24) при разных собственных значениях $\lambda^{(n)}$ и $\lambda^{(n')}$, то есть уравнения для функций $\phi_l^{(n)}(E,\chi_p)$ и $\phi_l^{(n')}(E,\chi_p)$, нетрудно получить для них следующее условие ортогональности:

$$\int_0^\infty \phi_l^{(n)}(E,\chi_p) G_0(E, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p)\phi_l^{(n')}(E,\chi_p)\,d\chi_p = 0, \qquad \lambda^{(n)} \neq \lambda^{(n')}. \tag{26}$$

Всякое решение задачи (24), (25) определяется с точностью до нормировочного множителя. Этот множитель можно зафиксировать, выбирая условие нормировки функций $\phi_l^{(n)}(E,\chi_p)$ в форме

$$\int_0^\infty G_0(E, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p)\big(\phi_l(E,\chi_p)\big)^2\,d\chi_p = 1. \tag{27}$$

Получив зависимости $\lambda = \lambda_l^{(n)}(E,a)$, мы сможем затем определить зависимость $E = E_l^{(n)}(\lambda, a)$, то есть зависимость уровней энергии от параметров потенциала.

Аналитическое решение

Рассмотрим частный случай, когда энергия двухчастичной системы равна нулю ($E = 0$). Из (2) ясно, что в этом случае функции Грина с $j = 1$ и 2 одинаковы и определяются выражением

$$G_{0,1}(0, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p) = G_{0,2}(0, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p) = -(m\,\mathrm{ch}\,\chi_p)^{-2}.$$

В таком случае дифференциальное уравнение (24) с функциями Грина уравнений Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского примет вид

$$\frac{d^2\phi_l(0,\chi_p)}{d\chi_p^2} - \left(a^2m^2 + \frac{l(l+1)}{\mathrm{sh}^2\,\chi_p} - \frac{\lambda}{\mathrm{ch}^2\,\chi_p}\right)\phi_l(0,\chi_p) = 0. \tag{28}$$

Сделав замену переменной $y = \mathrm{th}^2\,\chi_p$, произведём в (28) следующую подстановку:

$$\phi_l(0,y) = y^{(l+1)/2}(1-y)^{am/2}\upsilon_l(y).$$

Тогда для функции υ получим гипергеометрическое уравнение [10], решение которого записывается в виде линейной комбинации двух независимых гипергеометрических функций ($\lambda = s(s+1)$):

$$\upsilon_l(y) = C_{l,s}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}+\frac{am+l}{2};1+\frac{s}{2}+\frac{am+l}{2};\frac{3}{2}+l;y\right)+$$
$$+D_{l,s}\ y^{-l-1/2}\ {}_2F_1\left(-\frac{s}{2}+\frac{am-l}{2};\frac{1}{2}+\frac{s}{2}+\frac{am-l}{2};\frac{1}{2}-l;y\right).$$

Вернёмся теперь к функции $\phi_l(0,\chi_p)$ и учтём граничные условия (25). Для выполнения условия в нуле постоянную D следует выбрать равной нулю. В результате имеем

$$\phi_l(0,\chi_p) = C_{l,s}\,(\mathrm{th}\,\chi_p)^{l+1}(1-\mathrm{th}^2\,\chi_p)^{am/2}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}+\frac{am+l}{2};1+\frac{s}{2}+\frac{am+l}{2};\frac{3}{2}+l;\mathrm{th}^2\,\chi_p\right). \tag{29}$$

Учитывая граничное условие на бесконечности, получаем спектр константы связи λ:

$$\lambda = s(s+1) = (l+am+2n+1)(l+am+2n+2), \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{30}$$

Таким образом, (29), (30) есть общее решение задачи Штурма – Лиувилля (28), (25) для произвольного орбитального момента l и произвольного параметра a.

В частном случае, для состояний с орбитальным квантовым числом, равным нулю ($l = 0$), решение можно записать гораздо компактнее. Применяя известные соотношения для гипергеометрических функций, формулу (29) можно записать через присоединённые функции Лежандра первого рода:

$$\phi_0(0,\chi_p) = \tilde{C}_{0,s}\,P_s^{-am}(\mathrm{th}\,\chi_p).$$

Данный результат находится в соответствии с выражением, полученным в работе [5].

Теперь, вспоминая, что $\phi_l(E,\chi_p) = G_0^{-1}(E,E_p)\,\psi_l(E,p)$, нетрудно найти волновые функции $\psi_l(0,p)$ – решения интегральных уравнений (6) с функциями Грина уравнений Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского (2). Условие ортогональности и нормировки для функций $\psi_l(E,p)$ легко получить из (26), (27):

$$\int_0^\infty \psi_l^{(n)}(E,p)\,G_0^{-1}(E,E_p)\,\psi_l^{(n')}(E,p)\frac{dp}{E_p} = \delta_{\lambda^{(n)}\lambda^{(n')}}. \tag{31}$$

В случае функций Грина с $j = 1$ и $j = 2$, когда энергия двухчастичной системы равна нулю ($E = 0$), условие нормировки можно записать в виде

$$\int_0^\infty \left(\psi_l(0,p)\right)^2 E_p\,dp = 1.$$

На рис. 1 приведены зависимости волновой функции $\psi_l(0,p)$ при различных значениях параметра a и квантовых чисел l, n для частиц массы $m = 1$. В начале координат волновая функция $\psi_l(0,p)$ ведёт себя как степенная функция p^{l+1}. Количество нулей волновой функции (кроме нуля при $p = 0$) совпадает со значением квантового числа n. Когда n отлично от нуля, при увеличении квантового числа l увеличиваются интервалы между нулями волновой функции и уменьшаются её значения в точках экстремума, а при увеличении параметра a наблюдается обратный эффект.

Полученные результаты хорошо иллюстрируют общие закономерности, которые справедливы также для ненулевых энергий связанного состояния и для функций Грина с $j = 3$ и 4.

Другой частный случай, в котором задача Штурма – Лиувилля (24), (25) решается точно, имеет место при энергии двухчастичной системы равной массе частиц $2E = 2m$. Из (2) следует, что в этом случае функция Грина с $j = 1$ определяется выражением

$$G_{0,1}(m, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p) = -(m\,\mathrm{sh}\,\chi_p)^{-2}. \tag{32}$$

Подставляя функцию Грина уравнения Логунова – Тавхелидзе (32) в уравнение (24), получим

$$\frac{d^2\phi_l(m,\chi_p)}{d\chi_p^2} - \left(a^2m^2 + \frac{l(l+1)-\lambda}{\mathrm{sh}^2\,\chi_p}\right)\phi_l(m,\chi_p) = 0. \tag{33}$$

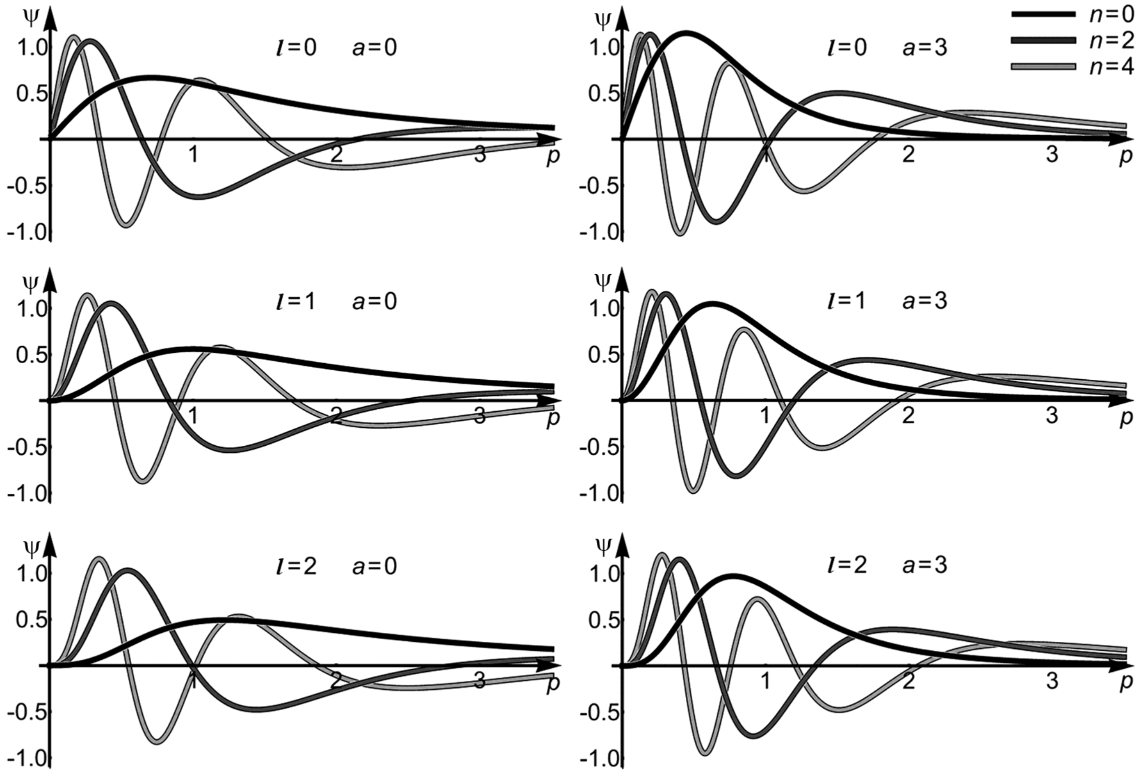

Рис. 1. Зависимость волновой функции $\psi_l(0,p)$ от параметра a и квантовых чисел l, n для функций Грина с j = 1 и 2 при E = 0, m = 1

Учитывая граничные условия (25), решение задачи Штурма – Лиувилля (33), (25) получим в виде

$$\phi_l(m,\chi_p)=C_{l,s}\left(\frac{\operatorname{cth}\chi_p-1}{\operatorname{cth}\chi_p+1}\right)^{\frac{am}{2}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\sqrt{l(l+1)+\frac{1}{4}-\lambda};\frac{1}{2}+\sqrt{l(l+1)+\frac{1}{4}-\lambda};1+am;\frac{1-\operatorname{cth}\chi_p}{2}\right)= \tag{34}$$

$$=\tilde{C}_{l,s}P_s^{-am}(\operatorname{cth}\chi_p),$$

$$\lambda>(l+1/2)^2,\qquad s=-\frac{1}{2}+\sqrt{l(l+1)+\frac{1}{4}-\lambda}\,.$$

При $\lambda>(l+1/2)^2$ величина s становится комплексной и функция (34) имеет бесконечное количество нулей вблизи начала координат. Дискретный спектр содержит бесконечное число уровней энергии.

При других значениях энергии двухчастичной системы для всех функций Грина (2) решения задачи Штурма – Лиувилля (28), (29) были найдены численно.

Численное решение

Чтобы исследовать зависимости (при фиксированных a) $\lambda=\lambda_l^{(n)}(E,a)$ и обратную ей $E=E_l^{(n)}(\lambda,a)$, а также зависимость волновых функций $\psi_l(E,p)$ от импульса p во всём диапазоне возможных значений энергии двухчастичной системы, необходимо использовать численный анализ полученных интегральных и дифференциальных уравнений. В частном случае a = 0 это было проделано нами в [7, 8]. Используя в данной работе аналогичный метод численных расчётов, мы опустим его детали.

Результаты наших предыдущих работ и новые результаты (где a > 0) здесь обобщены и проанализированы. На рис. 2 приведена зависимость волновой функции $\psi_l(E,p)$ при различных значениях энергии двухчастичной системы E и для функций Грина (2) с $j=1,2,3,4$.

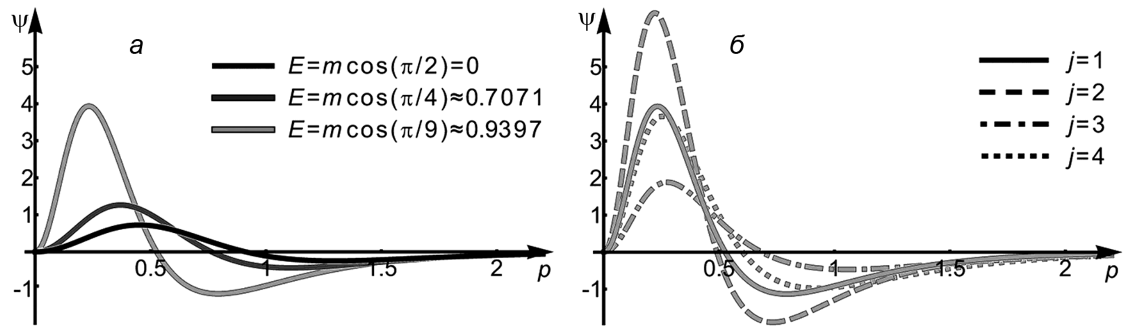

Рис. 2. Зависимость волновой функции $\psi_l(E,p)$ от энергии E (*а*) и для различных функций Грина (*б*) при $n = 1$, $l = 1$, $a = 2$, $m = 1$

При увеличении энергии связанного состояния значения радиальной волновой функции $\psi_l(E,p)$ в точках экстремума возрастают и уменьшаются интервалы между нулями волновой функции. Похожим образом волновая функция $\psi_l(E,p)$ ведет себя при увеличении параметра a (рис. 1). При использовании различных функций Грина (2) меняется ширина и высота максимумов и минимумов волновой функции.

На рис. 3 приведены зависимости константы связи λ от энергии E для $j = 1,2,3,4$, а также зависимости от квантовых чисел n, l и параметра a для функции Грина уравнения Логунова – Тавхелидзе ($j = 1$). Видно, что при увеличении энергии двухчастичной системы E значения константы связи λ уменьшаются. Когда энергия двухчастичной системы E близка к нулю, наибольший вклад в увеличение значения константы λ даёт увеличение квантового числа n, а при значениях энергии, близких к массе связанного состояния, – увеличение орбитального квантового числа l.

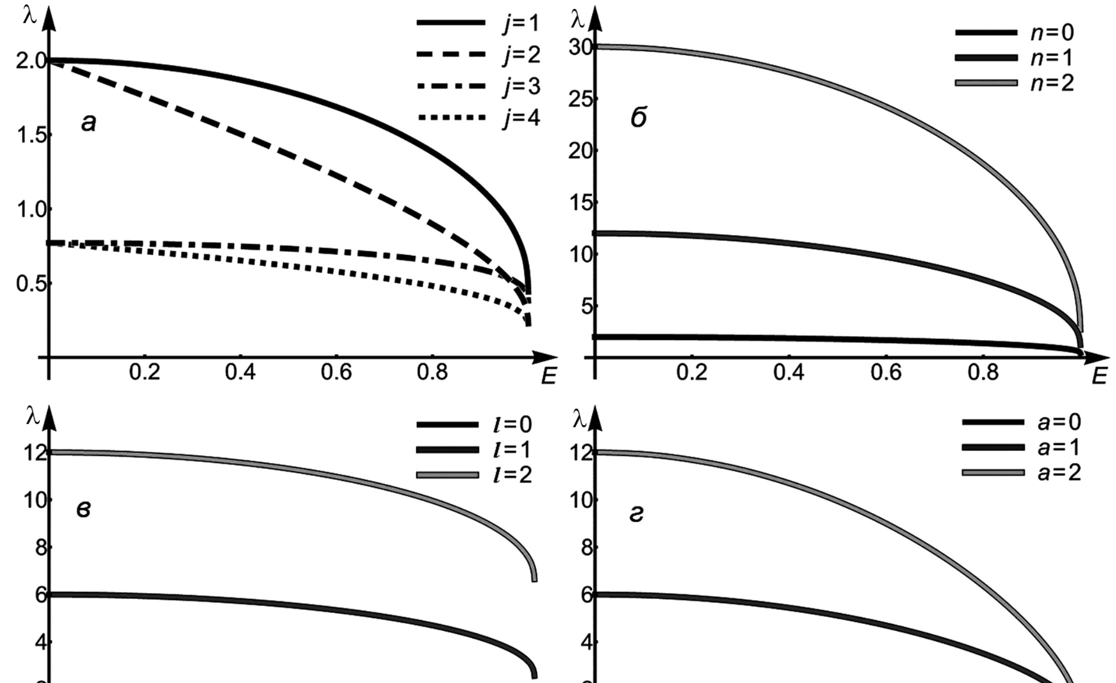

Рис. 3. Зависимость констант связи λ от энергии E: *а* – для функций Грина с $j = 1, 2, 3, 4$ при $n = 0$, $l = 0$, $a = 0$; *б* – для $n = 0, 1, 2$ при $j = 1$, $l = 0$, $a = 0$; *в* – для $l = 0, 1, 2$ при $j = 1$, $n = 0$, $a = 0$; *г* – для $a = 0, 1, 2$ при $j = 1$, $n = 0$, $a = 0$

Из (2) следует, что значения константы λ при $j = 3, 4$, так же как и для $j = 1, 2$, совпадают при $E = 0$, что хорошо видно на рис. 3. Легко убедится, что численное решение согласуется с точным решением (30).

Значения константы связи λ, полученные численно, имеют от восьми (при нулевых значениях квантовых чисел и энергии E) до пяти верных значащих цифр после запятой. Максимальная относительная погрешность численного решения дифференциальных уравнений (24) при $j = 1$ и 2 и $E = 0$, для которых есть аналитическое решение, имеет порядок 10^{-5}. Отметим также, что полученные численно волновые функции с хорошей точностью удовлетворяют условию ортогональности (31).

Заключение

Настоящая работа посвящена исследованию интегральных квазипотенциальных уравнений Логунова – Тавхелидзе, Кадышевского и их модифицированных версий. Для потенциала, имеющего в релятивистском конфигурационном представлении вид $V(r) = -\lambda/(r^2 + a^2)$, трёхмерные интегральные уравнения в импульсном представлении сведены к парциальным одномерным, найден явный вид парциальных потенциалов. Показано, что эти одномерные интегральные уравнения сводятся к задачам Штурма – Лиувилля. Установлено, что при этом парциальные потенциалы являются функциями Грина задач Штурма – Лиувилля. Получены условия ортогональности и нормировки для волновых функций. Установлено, что нулевые значения энергии связанного состояния достигаются только при некоторых значениях константы связи λ, найдена зависимость этих значений λ от квантовых чисел n, l и параметра a. При этих значениях λ найдены точные аналитические формулы для волновых функций в импульсном представлении $\psi_l(E, p)$. Для ненулевых энергий связанного состояния получены численные решения квазипотенциальных уравнений для различных параметров системы частиц и квазипотенциала. Графически представлены энергетические спектры и зависимости волновых функций, на основе которых выявлены следующие закономерности: значения константы связи λ уменьшаются при увеличении энергии связанного состояния $2E$, а при увеличении квантовых чисел n, l и параметра a значения константы связи λ увеличиваются; результатом увеличения энергии связанного состояния, параметра a и уменьшения орбитального квантового числа l является уменьшение неопределенности начального относительного импульса частиц в системе центра инерции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев В.А., Саврин В.И., Сисакян А.Н., Тавхелидзе А.Н. // Теоретическая и математическая физика. – 2002. – Т. 132. – № 2. – С. 267–287.
2. Logunov A.A. and Tavkhelidze A.N. // Il Nuovo Cimento. – 1963. – V. 29. – No. 2. – P. 380–399.
3. Kadyshevsky V.G. // Nucl. Phys. B. – 1968. – V. 6. – No. 2. – P. 125–148.
4. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., and Skachkov N.B. // Il Nuovo Cimento. – 1968. – V. 55. – No. 2. – P. 635–690.
5. Kapshai V.N., Kuleshov S.P., and Skachkov N.B. // Theor. Math. Phys. – 1983. – V. 55. – No. 3. – P. 545–553.
6. Kapshai V. // Operator Theory: Adv. Appl. – 2002. – V. 132. – P. 199–206.
7. Kapshai V.N. and Fialka S.I. // Proc. F. Scorina Gomel State University. – 2012. – V. 75. – No. 6. – P. 48–53.
8. Капшай В.Н., Фиалка С.И. // Изв. вузов. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 9. – С. 1237–1247.
9. Wellin P. Programming with Mathematica®: An Introduction. – Cambridge University Press, 2013. – 728 p.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.
11. Andrews G.E., Askey R., and Roy R. Special Functions. – Cambridge University Press, 2001. – 682 p.

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 18.10.16.

Капшай Валерий Николаевич, к.ф.-м.н., доцент каф. теоретической физики, e-mail: kapshai@rambler.ru;
Фиалка Сергей Игоревич, аспирант каф. теоретической физики, e-mail: sergey.fialka@gmail.com.