В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, Точное решение ковариантного двухчастичного одновременного уравнения с суперпозицией квазипотенциалов однобозонного обмена, *ТМФ*, 1982, том 53, номер 1, 32–42

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 53, № 1
октябрь, 1982

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КОВАРИАНТНОГО ДВУХЧАСТИЧНОГО ОДНОВРЕМЕННОГО УРАВНЕНИЯ С СУПЕРПОЗИЦИЕЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

Капшай В. Н., Скачков Н. Б.

В квазипотенциальном подходе Логунова – Тавхелидзе рассмотрена релятивистская связанная система двух скалярных частиц в случае квазипотенциала, являющегося суперпозицией одномезонного и однофотонного пропагаторов. Для центрально-симметричного случая получено релятивистское условие квантования уровней энергии, и построены волновые функции в импульсном и в релятивистском конфигурационном представлениях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание двухчастичной релятивистской системы — одна из центральных проблем квантовой теории поля. Для ее изучения широко используются четырехмерное уравнение Бете — Солпитера и ковариантные трехмерные уравнения, полученные в одновременном подходе Логунова — Тавхелидзе [1] к проблеме релятивистского описания составных систем.

Для релятивистской амплитуды упругого рассеяния двух бесспиновых частиц с равными массами $m_1=m_2=m$ и волновой функции их относительного движения уравнения Логунова — Тавхелидзе записываются в виде [1]

$$T(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{q}})=V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{q}};\overset{0}{E})+ \tag{1.1}$$

$$+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};\overset{0}{E})\frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}\,\frac{T(\overset{0}{\mathbf{k}},\overset{0}{\mathbf{q}})}{\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2-\overset{0}{\mathbf{q}}{}^2-i\varepsilon},$$

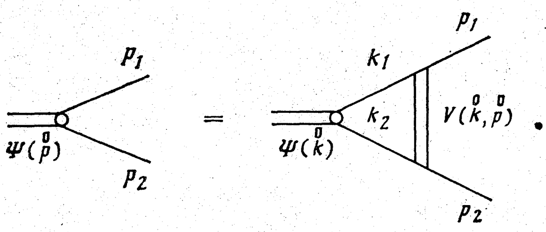
$$(m^2+\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2-\overset{0}{E}{}^2)\Psi(\overset{0}{\mathbf{p}})=\frac{1}{4(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{p}}{}^2}}\int V(\overset{0}{\mathbf{p}},\overset{0}{\mathbf{k}};\overset{0}{E})\Psi(\overset{0}{\mathbf{k}})\,d\overset{0}{\mathbf{k}}. \tag{1.2}$$

Нули сверху обозначают, что эти вектора $\overset{0}{\mathbf{p}}$ и $\overset{0}{\mathbf{k}}$ являются ковариантными обобщениями векторов импульсов частиц в с.ц.и., которые были введены в работах [2]. Так, если мы определим $(\overset{0}{p}_1)_\mu=(\Lambda_P{}^{-1}p_1)_\mu$, где Λ_P — чистое преобразование в с.ц.и. двух частиц, движущуюся с суммарным импульсом $\mathbf{P}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$, $\Lambda_P(M,0)=(P_0,\mathbf{P})$, то

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_1=\mathbf{p}_1-\frac{\mathbf{P}}{M}\left[(p_1)_0-\frac{(\mathbf{p}_1\mathbf{P})}{P_0+M}\right], \tag{1.3}$$

$$(\overset{0}{p}_1)_0=(\Lambda_P{}^{-1}p_1)_0=p_1{}^\mu P_\mu/M=\mathrm{inv}.$$

Графическое изображение уравнения (1.2) следующее:



Для векторов $\mathring{\mathbf{p}}_1$, $\mathring{\mathbf{p}}_2$ и $\mathring{\mathbf{q}}_1$, $\mathring{\mathbf{q}}_2$ выполняются соотношения $\mathring{\mathbf{p}}_1=-\mathring{\mathbf{p}}_2$, $\mathring{\mathbf{q}}_1=-\mathring{\mathbf{q}}_2(\equiv\mathring{\mathbf{q}})$, обобщающие характерные для с.ц.и. соотношения между импульсами частиц. Энергетические же компоненты векторов не совпадают между собою ($\mathring{p}_0\neq\mathring{k}_0$), что отражает тот факт, что в уравнениях (1.1) и (1.2) все величины, как и в уравнениях Липпмана – Швингера и Шредингера, определены вне ковариантной «энергетической» поверхности $\mathring{k}_0=\mathring{p}_0$. При этом в (1.1) и (1.2) импульсы всех частиц находятся на массовой поверхности

$$p_0^2-\mathbf{p}^2=m^2;\quad k_0^2-\mathbf{k}^2=m^2. \tag{1.4}$$

Такая картина является альтернативной к подходу, основанному на уравнении Бете – Солпитера, в котором в каждой вершине выполняется закон сохранения 4-импульса, но все величины определены вне массовой поверхности (1.4).

Волновая функция в одновременном подходе определяется ковариантным образом через бете-солпитеровскую путем следующего определения [3]:

$$\Psi(\mathring{\mathbf{p}})=\int\exp\left[\frac{i}{2}(p_1-p_2)x\right]\delta(\lambda_P x)\left\langle 0\right|T\left\{\varphi_1\left(\frac{x}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\varphi_2\left(-\frac{x}{2}\right)\right\}\left|\,\mathbf{P},M\right\rangle d^4x,$$

где $x=x_1-x_2$ — относительная координата двух скалярных частиц, характеризуемых полевыми операторами $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$, а вектор $\lambda_P{}^\mu=P^\mu/\sqrt{P^2}$ — 4-скорость всей системы. В с.ц.и. $\mathbf{P}=0$, $\lambda_P{}^0=1$ и наличие $\delta(\lambda_P x)$-функции под знаком интеграла обеспечивает равенство времен двух частиц $x_1{}^0=x_2{}^0$.

Квазипотенциал $V(\mathring{\mathbf{p}},\mathring{\mathbf{k}};\mathring{E})$ (в общем случае комплексный и параметрически зависящий от полной энергии системы $2\mathring{q}_0=2\mathring{E}=M$) строится с использованием или двухвременной функции Грина рассматриваемой системы, или амплитуды рассеяния на массовой поверхности, т. е. как решение уравнения (1.1) относительно неизвестной функции $V(\mathring{\mathbf{p}},\mathring{\mathbf{k}};\mathring{E})$. Амплитуда $T(\mathring{\mathbf{p}},\mathring{\mathbf{q}})$ при этом считается заданной, например, диаграммами теории поля. Отметим здесь, что, поскольку релятивистская амплитуда $T(\mathring{\mathbf{p}},\mathring{\mathbf{q}})$ определяется из теории поля на энергетической поверхности $\mathring{p}_0=$ $=\mathring{q}_0$, возникает некоторый произвол при определении квазипотенциала

$V(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{k}}; \mathring{E})$ для $p_0 \neq k_0$, т. е. вне энергетической поверхности. Этим произволом мы воспользуемся, определяя квазипотенциал так, чтобы, с одной стороны, квазипотенциальное уравнение для волновой функции имело вид, максимально близкий к виду нерелятивистского уравнения Шредингера, а с другой стороны, чтобы квазипотенциал был локален в импульсном пространстве Лобачевского [4, 5], реализованном на верхней поле массового гиперболоида (1.4).

Переопределяя волновую функцию $\widetilde{\Psi}(\mathring{\mathbf{p}}) = E_{\mathring{p}} \Psi(\mathring{\mathbf{p}})$, можно представить уравнение (1.2) в виде

$$(\mathring{\mathbf{p}}^2 + m^2 - \mathring{E}^2)\, \widetilde{\Psi}(\mathring{\mathbf{p}}) = \frac{1}{4(2\pi)^3} \int V(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{k}}; \mathring{E})\, \widetilde{\Psi}(\mathring{\mathbf{k}})\, \frac{d\mathring{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2 + \mathring{\mathbf{k}}^2}}. \tag{1.5}$$

В настоящей работе мы рассмотрим уравнение (1.5) с некоторым модельным квазипотенциалом, который можно рассматривать как обобщение нерелятивистского кулоновского потенциала.

Мы найдем энергетический спектр такой модельной релятивистской двухчастичной системы и построим волновую функцию в импульсном представлении.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ «НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ» НОРМИРОВКЕ АМПЛИТУДЫ НА СЕЧЕНИЕ

На энергетической поверхности $E_{\mathring{p}} = E_{\mathring{q}}$ амплитуда $T(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{q}})$ совпадает с инвариантной амплитудой $T(s, t)$, связанной с дифференциальным сечением упругого рассеяния соотношением $(s = (p_1 + p_2)^2,\ t = (q_1 - p_1)^2)$

$$d\sigma/d\omega = |T(s, t)|^2/(8\pi)^2 s. \tag{2.1}$$

Непосредственно из уравнения (1.1) в случае действительного квазипотенциала $V(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{k}}; \mathring{E})$ следует релятивистское условие двухчастичной унитарности $(d\omega_{\mathring{\mathbf{k}}} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi)$:

$$\operatorname{Im} T(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{q}}) = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\mathring{\mathbf{q}}|}{\mathring{q}_0} \int d\omega_{\mathring{\mathbf{k}}}\, T^*(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{k}})\, T(\mathring{\mathbf{k}}, \mathring{\mathbf{q}}) \tag{2.2}$$

при $|\mathring{\mathbf{p}}| = |\mathring{\mathbf{q}}| = |\mathring{\mathbf{k}}|$. Следуя [5], определим

$$T(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{q}}) = 8\pi 2 E_{\mathring{q}} \widetilde{T}(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{q}}); \tag{2.3}$$

$$V(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{k}}; \mathring{E}) = -4 m E_{\mathring{k}} \widetilde{V}(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{k}}; \mathring{E}). \tag{2.4}$$

Тогда уравнение для амплитуды $\widetilde{T}(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{q}})$ принимает «нерелятивистский» вид

$$\widetilde{T}(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{q}}) = -\frac{m}{4\pi} \widetilde{V}(\mathring{\mathbf{p}}, \mathring{\mathbf{q}}; \mathring{E}) - \tag{2.5}$$

$$-\frac{m}{(2\pi)^3}\int \tilde{V}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{k}}; \overset{\circ}{E})\frac{d\overset{\circ}{\mathbf{k}}}{\overset{\circ}{\mathbf{k}}{}^2-\overset{\circ}{\mathbf{q}}{}^2-i\varepsilon}\tilde{T}(\overset{\circ}{\mathbf{k}}, \overset{\circ}{\mathbf{q}}).$$

При этом дифференциальное сечение рассеяния выражается через амплитуду $\tilde{T}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{q}})$ при $E_{0_p}=E_{0_q}$ точно так же, как и в нерелятивистской теории:

$$d\sigma/d\omega=|\tilde{T}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{q}})|^2. \tag{2.6}$$

Из уравнения (2.5) в случае вещественного $\tilde{V}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{k}}; \overset{\circ}{E})$ следует условие двухчастичной унитарности, в точности совпадающее по своей форме с нерелятивистским:

$$\operatorname{Im}\tilde{T}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{q}})=\frac{|\overset{\circ}{\mathbf{q}}|}{4\pi}\int \tilde{T}^*(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{k}})\tilde{T}(\overset{\circ}{\mathbf{k}}, \overset{\circ}{\mathbf{q}})\,d\omega_{0_k} \tag{2.7}$$

(при $|\overset{\circ}{\mathbf{p}}|=|\overset{\circ}{\mathbf{q}}|=|\overset{\circ}{\mathbf{k}}|$).

Уравнение для волновой функции (1.3) с учетом определения (2.4) можем записать в виде

$$(E_{0_p}^2-\overset{\circ}{E}{}^2)\tilde{\Psi}(\overset{\circ}{\mathbf{p}})=-\frac{m}{(2\pi)^3}\int \tilde{V}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{k}}; \overset{\circ}{E})\tilde{\Psi}(\overset{\circ}{\mathbf{k}})\,d\overset{\circ}{\mathbf{k}} \tag{2.8}$$

или, если перейти к энергии связи $W=2m-2\overset{\circ}{E}$, в виде

$$\left[\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^2+W\left(m-\frac{W}{4}\right)\right]\tilde{\Psi}(\overset{\circ}{\mathbf{p}})=-\frac{m}{(2\pi)^3}\int \tilde{V}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{k}}; \overset{\circ}{E})\tilde{\Psi}(\overset{\circ}{\mathbf{k}})\,d\overset{\circ}{\mathbf{k}}. \tag{2.9}$$

В литературе процедуру получения уравнений (2.9) и (2.5) с потенциалом $\tilde{V}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \overset{\circ}{\mathbf{k}}; \overset{\circ}{E})$, уже не являющимся локальным в трехмерном евклидовом импульсном пространстве, иногда называют процедурой «минимальной релятивизации» [6].

3. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Локальность нерелятивистского потенциала в евклидовом импульсном пространстве позволяет интегральное уравнение Шредингера в импульсном пространстве перевести с помощью преобразования Фурье в локальное дифференциальное уравнение в координатном пространстве. Релятивистское обобщение такой процедуры было дано в [5], где было предложено вместо преобразования Фурье вести разложение по матричным элементам главной серии унитарных представлений группы Лоренца, т. е. по найденным в [7] функциям

$$\xi(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \mathbf{r})=((p_0-\overset{\circ}{\mathbf{p}}\mathbf{n})/m)^{-1-imr}, \quad \mathbf{r}=r\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2=1. \tag{3.1}$$

При этом модуль вектора $\mathbf{r}$, т. е. r, является релятивистским инвариантом [8] и в нерелятивистском пределе, когда $\xi(\overset{\circ}{\mathbf{p}}, \mathbf{r})\to\exp(i\overset{\circ}{\mathbf{p}}\mathbf{r})$ переходит в модуль относительной координаты, т. е. может рассматриваться как его инвариантное обобщение [5, 9].

Функции (3.1) удовлетворяют условиям ортогональности и полноты на поверхности массового гиперболоида (1.4). Преобразования с ними имеют вид [5]

$$(3.2)\qquad \tilde{\Psi}(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\mathbf{r})\,\tilde{\Psi}(\overset{\circ}{\mathbf{p}})\,\frac{m\,d\overset{\circ}{\mathbf{p}}}{\sqrt{m^2+\overset{\circ}{\mathbf{p}}{}^2}},$$

$$(3.3)\qquad \tilde{\Psi}(\overset{\circ}{\mathbf{p}})=\int \xi^*(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\mathbf{r})\,\tilde{\Psi}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

$$(3.4)\qquad \tilde{V}((\overset{\circ}{\mathbf{p}}(-)\overset{\circ}{\mathbf{k}})^2,\overset{\circ}{E})=\int \xi^*(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\mathbf{r})\,\tilde{V}(r,\overset{\circ}{E})\,\xi(\overset{\circ}{\mathbf{k}},\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

В последней формуле $\overset{\circ}{\mathbf{p}}(-)\overset{\circ}{\mathbf{k}}$ есть разность векторов в трехмерном импульсном пространстве, реализованном на массовом гиперболоиде (1.4) и обладающем геометрией пространства Лобачевского [5]:

$$(3.5)\qquad \overset{\circ}{\mathbf{p}}(-)\overset{\circ}{\mathbf{k}}\equiv\Delta_{0\,\overset{\circ}{p},k}=\overset{\circ}{\mathbf{p}}-\frac{\overset{\circ}{\mathbf{k}}}{m}\left(\overset{\circ}{p}_0-\frac{\overset{\circ}{\mathbf{k}}\overset{\circ}{\mathbf{p}}}{m+\overset{\circ}{k}_0}\right).$$

Зависимость правой части формулы (3.4) от вектора (3.5) следует из теоремы сложения плоских волн $\xi(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\mathbf{r})$ [5]. Функции $\xi(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнению

$$(3.6)\qquad H_0\xi(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\mathbf{r})=2E_{\overset{\circ}{p}}\,\xi(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\mathbf{r}),$$

где «свободный гамильтониан» H_0 реализуется в виде дифференциально-разностного оператора [5]

$$(3.7)\qquad H_0=2m\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)-\frac{2i}{r}\,\mathrm{sh}\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)+\frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2}\exp\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right).$$

Релятивистская инвариантность H_0 была доказана в [9]. В случае взаимодействия из уравнения (2.8), используя (3.2), (3.4) и (3.6), легко получить уравнение для волновой функции $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$:

$$(3.8)\qquad \left[\left(\frac{H_0}{2}\right)^2-\overset{\circ}{E}{}^2\right]\tilde{\Psi}(\mathbf{r})=-\tilde{V}(r,\overset{\circ}{E})\,\frac{H_0}{2}\,\tilde{\Psi}(\mathbf{r}).$$

Как было отмечено ранее [1, 10], квазипотенциал $\tilde{V}(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\ \overset{\circ}{\mathbf{k}};\ \overset{\circ}{E})$ можно строить с использованием амплитуды $T(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\ \overset{\circ}{\mathbf{k}})$ на энергетической поверхности, считая ее известной величиной. В низшем приближении имеем на энергетической поверхности

$$(3.9)\qquad \tilde{V}(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\overset{\circ}{\mathbf{k}},\overset{\circ}{E})=-\frac{1}{4mE_{\overset{\circ}{k}}}\,T(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\overset{\circ}{\mathbf{k}}).$$

Для амплитуды обмена скалярным мезоном массы μ $T(\overset{\circ}{\mathbf{p}},\ \overset{\circ}{\mathbf{k}})=4m^2g^2(\mu^2-$

$-(p-k)^2)^{-1}$, где g — безразмерная константа связи, имеем на энергетической поверхности $E_{\overset{0}{p}}=E_{\overset{0}{k}}=\overset{0}{E}$ [5]

$$(3.10)\qquad \tilde{V}(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; \overset{0}{E}) = -\frac{m}{\overset{0}{E}} \frac{g^2}{\mu^2-(p-k)^2} \equiv - \frac{m}{\overset{0}{E}} \frac{g^2}{\mu^2-2m^2+\sqrt{m^2+\Delta^2_{\overset{0}{p},\overset{0}{k}}}}.$$

Примем, следуя [11], что формула (3.10) справедлива и вне энергетической поверхности. Тогда квазипотенциал локален в пространстве Лобачевского: $\tilde{V}(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; \overset{0}{E}) = \tilde{V}(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}; \overset{0}{E})$.

4. РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МОДЕЛЬНЫМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрим уравнение (2.8), выбрав в качестве квазипотенциала величину

$$(4.1)\qquad \tilde{V}(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}; \overset{0}{E}) = -\frac{m}{\overset{0}{E}} \frac{g^2}{|\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}|^2}.$$

Напомним, что потенциал $V(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ в нерелятивистском уравнении Шредингера, отвечающий кулоновскому взаимодействию, имеет вид

$$(4.2)\qquad V(\mathbf{p}-\mathbf{k}) = -g^2/|\mathbf{p}-\mathbf{k}|^2.$$

Модельный квазипотенциал (4.1) представляет собой не что иное, как суперпозицию двух квазипотенциалов вида (3.10), отвечающих значениям массы обмениваемого бозона $\mu=0$ и $\mu=2m$:

$$(4.3)\qquad \tilde{V}(\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}; \overset{0}{E}) = -\frac{m}{\overset{0}{E}} \frac{g^2}{|\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}|^2} = -\frac{m}{\overset{0}{E}} g^2 \left[\frac{1}{0-(p-k)^2} - \frac{1}{(2m)^2-(p-k)^2}\right].$$

Сосредоточим внимание на уравнении (2.8) с потенциалом (4.1):

$$(4.4)\qquad (E^2_{\overset{0}{p}} - \overset{0}{E}{}^2)\tilde{\Psi}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\overset{0}{E}} \int \frac{g^2}{|\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}|^2} E_{\overset{0}{k}} \tilde{\Psi}(\overset{0}{\mathbf{k}}) \frac{d\overset{0}{\mathbf{k}}}{\sqrt{m^2+\overset{0}{\mathbf{k}}{}^2}}.$$

Соответствующий (4.1) квазипотенциал в релятивистском конфигурационном представлении находим с использованием формулы, обратной (3.4):

$$(4.5)\qquad \tilde{V}(r, \overset{0}{E}) = -\frac{m}{\overset{0}{E}} \frac{g^2}{4\pi r} \operatorname{th}\left(\frac{\pi r m}{2}\right).$$

Ясно, что в нерелятивистском пределе, т. е. при $rm \gg 1$, имеем $(g^2/4\pi r)\times$ $\times \operatorname{th}(\pi r m/2) \to g^2/4\pi r$, это означает, что потенциал (4.1) и в конфигурационном представлении может рассматриваться как обобщение нерелятивистского кулоновского потенциала.

Для центрально-симметричного случая ($\widetilde{\Psi}(\mathbf{r})=\widetilde{\Psi}(r)$) уравнение (3.8) для функции $r\widetilde{\Psi}(r)$ в случае квазипотенциала (4.5) запишется в виде

$$\left[m^2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right)-\overset{0}{E}{}^2\right] r\widetilde{\Psi}(r)= = \frac{m}{\overset{0}{E}}\frac{g^2}{4\pi r}\operatorname{th}\left(\frac{\pi r m}{2}\right)' m \operatorname{ch}\left(\frac{i}{m}\frac{d}{dr}\right) r\widetilde{\Psi}(r). \tag{4.6}$$

Преобразования волновых функций с плоскими волнами (3.1) принимают в центрально-симметричном случае вид (здесь и ниже $\overset{0}{p}=|\overset{0}{\mathbf{p}}|$ и т. п.)

$$\overset{0}{p}\widetilde{\Psi}(\overset{0}{p})=4\pi\int_0^\infty \sin(mr\chi_{\underset{p}{0}})\, r\widetilde{\Psi}(r)\,dr, \tag{4.7}$$

$$r\widetilde{\Psi}(r)=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \sin(mr\chi_{\underset{p}{0}})\,\overset{0}{p}\widetilde{\Psi}(\overset{0}{p})\, m\,d\chi_{\underset{p}{0}}, \tag{4.8}$$

где переменная $\chi_{\underset{p}{0}}$, именуемая быстротой, определяется из параметризации

$$E_{\underset{p}{0}}=m\operatorname{ch}(\chi_{\underset{p}{0}});\quad \overset{0}{\mathbf{p}}=m\operatorname{sh}(\chi_{\underset{p}{0}})\,\mathbf{n}_{\underset{p}{0}};\quad \mathbf{n}_{\underset{p}{0}}=\overset{0}{\mathbf{p}}\Big/|\overset{0}{\mathbf{p}}|, \tag{4.9}$$

и аналогично для других 4-импульсов. В уравнении (4.4) в сферически-симметричном случае $\widetilde{\Psi}(\overset{0}{\mathbf{p}})=\widetilde{\Psi}(\overset{0}{p})\equiv\widetilde{\Psi}(\chi_{\underset{p}{0}})$ можно проинтегрировать по углам вектора $\overset{0}{\mathbf{k}}$ и перейти к одномерному уравнению, записанному в терминах быстрот:

$$[m^2\operatorname{ch}^2(\chi_{\underset{p}{0}})-\overset{0}{E}{}^2]\operatorname{sh}(\chi_{\underset{p}{0}})\,\widetilde{\Psi}(\chi_{\underset{p}{0}})= = \frac{g^2}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{\overset{0}{E}}\int_0^\infty \ln\left|\frac{\operatorname{cth}^2((\chi_{\underset{p}{0}}-\chi_{\underset{k}{0}})/2)}{\operatorname{cth}^2((\chi_{\underset{p}{0}}+\chi_{\underset{k}{0}})/2)}\right|\operatorname{sh}(\chi_{\underset{k}{0}})\,\widetilde{\Psi}(\chi_{\underset{k}{0}})\,m\,d\chi_{\underset{k}{0}}. \tag{4.10}$$

Проинтегрируем формально в правой части (4.4) по частям. Уравнение примет вид

$$(E_{\underset{p}{0}}^2-\overset{0}{E}{}^2)\,\widetilde{\Psi}(\overset{0}{p})=\frac{g^2}{4\pi^2}\frac{m^2}{\overset{0}{E}}\int_0^\infty\frac{d\overset{0}{k}}{\overset{0}{p}{}^2-\overset{0}{k}{}^2}\int_{|\overset{0}{k}|}^\infty \widetilde{\Psi}(\overset{0}{k}{}')\,2\overset{0}{k}{}'\,d\overset{0}{k}{}'. \tag{4.11}$$

Используя свободную функцию Грина

$$G_0(\overset{0}{p},\overset{0}{E})=\frac{1}{E_{\underset{p}{0}}^2-\overset{0}{E}{}^2}=\frac{1}{m^2\operatorname{ch}^2\chi_{\underset{p}{0}}-m^2\cos^2 x} \tag{4.12}$$

(здесь $\overset{0}{E}\equiv m\cos x$), уравнение (4.11) представим в виде

$$G_0^{-1}(\overset{0}{p},\overset{0}{E})\,\widetilde{\Psi}(\overset{0}{p})= \tag{4.13}$$

$$= \frac{g^2}{4\pi^2}\,\frac{m^2}{\overset{0}{E}} \int\limits_0^\infty \frac{d\overset{0}{k}}{G_0^{-1}(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) - G_0^{-1}(\overset{0}{k},\overset{0}{E})} \int\limits_{\overset{0}{k}}^\infty \widetilde{\Psi}(\overset{0}{k}')\, dG_0^{-1}(\overset{0}{k}',\overset{0}{E}).$$

Рассмотрим в качестве волновой функции основного состояния следующее выражение:

$$\widetilde{\Psi}(\overset{0}{p}) = G_0^2(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) = \frac{1}{[\overset{0}{p}^2 + W(m - W/4)]^2} = \frac{1}{(\overset{0}{p}^2 + m^2\sin^2 x)^2}. \tag{4.14}$$

С помощью алгебраического тождества

$$\begin{aligned}
&[G_0^{-1}(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) - G_0^{-1}(\overset{0}{k},\overset{0}{E})]^{-1} G_0(\overset{0}{k},\overset{0}{E}) = \\
&= \{[G_0^{-1}(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) - G_0^{-1}(\overset{0}{k},\overset{0}{E})]^{-1} + G_0(\overset{0}{k},\overset{0}{E})\} G_0(\overset{0}{p},\overset{0}{E}),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

а также того факта, что

$$\int\limits_0^\infty [G_0^{-1}(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) - G_0^{-1}(\overset{0}{k},\overset{0}{E})]^{-1}\, d\overset{0}{k} = 0, \tag{4.16}$$

приходим к выводу, что уравнение (4.13) с волновой функцией (4.14) удовлетворяется, если выполняется равенство

$$1 = \frac{g^2}{4\pi^2}\,\frac{m^2}{\overset{0}{E}} \int\limits_0^\infty G_0(\overset{0}{k},\overset{0}{E})\, d\overset{0}{k}. \tag{4.17}$$

Это равенство представляет собой условие квантования энергии основного состояния. Используя (4.12), это условие можем представить в виде

$$\frac{g^2}{4\pi}\,\frac{m^2}{2\overset{0}{E}\sqrt{m^2 - \overset{0}{E}{}^2}} = \frac{g^2}{4\pi\sin(2x)} = 1. \tag{4.18}$$

Дифференцируя (4.15) по $\overset{0}{E}{}^2$, можно получить тождество

$$\begin{aligned}
&[G_0^{-1}(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) - G_0^{-1}(\overset{0}{k},\overset{0}{E})]^{-1} G_0^m(\overset{0}{k},\overset{0}{E}) = \\
&= [G_0^{-1}(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) - G_0^{-1}(\overset{0}{k},\overset{0}{E})]^{-1} G_0^m(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) + \\
&+ \sum_{l=0}^{m-1} G_0^{l+1}(\overset{0}{k},\overset{0}{E})\, G_0^{m-l}(\overset{0}{p},\overset{0}{E}).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Волновую функцию n-го состояния $\widetilde{\Psi}^{(n)}(\overset{0}{p})$ будем искать в виде полинома $(n+1)$-й степени по свободной функции Грина:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}^{(n)}(\overset{0}{p}) &= G_0^2(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) \sum_{l=1}^{n} lB_l^{(n)} [(m^2 - \overset{0}{E}{}^2) G_0(\overset{0}{p},\overset{0}{E})]^{l-1} = \\
&= G_0^2(\overset{0}{p},\overset{0}{E}) \sum_{l=1}^{n} lB_l^{(n)} \left[\frac{m^2\sin^2 x}{\overset{0}{p}^2 + m^2\sin^2 x}\right]^{l-1},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

где $B_l^{(n)}$ — подлежащие определению коэффициенты, имеющие одинаковую размерность. Тогда из (4.13) с использованием (4.19) имеем

$$\sum_{l=1} lB_l^{(n)} (m^2-\overset{0}{E}{}^2)^{l-1} G_0{}^l (\overset{0}{p},\overset{0}{E}) = \tag{4.21}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (m^2-\overset{0}{E}{}^2)^{l-1} G_0{}^l (\overset{0}{p},\overset{0}{E}) \sum_{j=l}^{n} B_j^{(n)} F_{j-l+1}^{(n)} (\overset{0}{E}),$$

где величины $F_{j+1}(\overset{0}{E})$ определены следующим образом:

$$F_{j+1}^{(n)}(\overset{0}{E}) = \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{m^2}{\overset{0}{E}} (m^2 - \overset{0}{E}{}^2)^j \int_0^\infty G_0^{j+1} (\overset{0}{k}, \overset{0}{E})\, d\overset{0}{k}. \tag{4.22}$$

Равенство (4.21), а с ним и уравнение (4.13) выполняются, если коэффициенты $B_j^{(n)}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} nB_n^{(n)} &= B_n^{(n)} F_1^{(n)} (\overset{0}{E}), \\ (n-1)\, B_{n-1}^{(n)} &= B_{n-1}^{(n)} F_1^{(n)} (\overset{0}{E}) + B_n^{(n)} F_2^{(n)} (\overset{0}{E}), \\ (n-2)\, B_{n-2}^{(n)} &= B_{n-2}^{(n)} F_1^{(n)} (\overset{0}{E}) + B_{n-1}^{(n)} F_2^{(n)} (\overset{0}{E}) + B_n^{(n)} F_3^{(n)} (\overset{0}{E}), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_1^{(n)} &= B_1^{(n)} F_1^{(n)} (\overset{0}{E}) + B_2^{(n)} F_2^{(n)} (\overset{0}{E}) + \dots + B_n^{(n)} F_n^{(n)} (\overset{0}{E}). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Из определения (4.22) легко показать, что справедлива формула

$$F_{j+1}^{(n)} (\overset{0}{E}) = \frac{(2j)!}{(j!)^2 4^j} F_1^{(n)} (\overset{0}{E}). \tag{4.24}$$

Первое из уравнений системы (4.23) есть не что иное, как условие квантования

$$n = F_1^{(n)} (\overset{0}{E}) = \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{m^2}{\overset{0}{E}} \int_0^\infty G_0 (\overset{0}{k}, \overset{0}{E})\, d\overset{0}{k}. \tag{4.25}$$

Обозначая энергию n-го состояния $2\overset{0}{E}_n = 2m \cos(x_n)$, имеем, таким образом,

$$\frac{g^2 m^2}{4\pi\, 2\overset{0}{E}_n \sqrt{m^2 - \overset{0}{E}_n{}^2}} = \frac{g^2}{4\pi \sin(2x_n)} = n. \tag{4.26}$$

Энергию связи n-го состояния W_n можем записать в виде

$$W_n = 2m[1-({}^1/_2+{}^1/_2\sqrt{1-(g^2/4\pi n)^2})^{1/2}]. \tag{4.27}$$

Очевидно , что в случае малой константы связи g формула (4.27) дает в первом приближении нерелятивистские кулоновские уровни энергии.

После того как энергия n-го состояния $\overset{0}{E}_n$ зафиксирована условием (4.26), можем полностью определить все коэффициенты $F_{j+1}^{(n)}(\overset{0}{E}_n)$ системы (4.23):

$$F_{j+1}^{(n)} (\overset{0}{E}_n) = \frac{(2j)!}{(j!)^2 4^j} n. \tag{4.28}$$

Легко видеть, что из $n-1$ уравнений системы (4.23) (кроме первого) коэффициенты $B_{n-1}^{(n)}, B_{n-2}^{(n)}, \ldots, B_1^{(n)}$ последовательно выражаются через коэффициент $B_n^{(n)}$, который из системы (4.23), т. е. из уравнения (4.13), не определяется и может быть фиксирован дополнительным условием типа условия нормировки. Выбирая $nB_n^{(n)}=(-1)^{n-1}C_n$, приведем без вывода результат нахождения остальных коэффициентов $B_l^{(n)}$:

$$lB_l^{(n)}=(-1)^{l-1}\frac{\Gamma(n+l)4^l}{\Gamma(2l)\Gamma(n+1-l)}C_n. \tag{4.29}$$

Таким образом, волновую функцию n-го состояния можем записать в виде

$$\tilde{\Psi}^{(n)}(\mathring{p})=C_nG_0^2(\mathring{p},\mathring{E}_n)\times$$
$$\times\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}\frac{\Gamma(n+l)4^l}{\Gamma(2l)\Gamma(n+1-l)}[(m^2-E_n^2)G_0(\mathring{p},\overset{0}{E}_n)]^{l-1}, \tag{4.30}$$

где $\overset{0}{E}_n$ определяется из условия квантования (4.26).

Теперь легко определить волновую функцию в релятивистском конфигурационном представлении. Для волновой функции основного состояния (4.14) с помощью преобразования (4.8) легко находим

$$r\tilde{\Psi}^{(1)}(r)=\frac{C_1}{4\pi m^2}\frac{-1}{\sin 2x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sh}[(\pi/2-x)rm]}{\operatorname{ch}(\pi rm/2)}\right\}, \tag{4.31}$$

где после дифференцирования x определяется из формулы (4.18), т. е. как $^1/_2\arcsin(g^2/4\pi)$. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что волновая функция (4.31) удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению (4.6) при выполнении указанного условия квантования для энергии $2\overset{0}{E}=2m\cos x$. Аналогично находим волновую функцию n-го состояния в релятивистском конфигурационном представлении:

$$r\tilde{\Psi}^{(n)}(r)=\frac{1}{4\pi m^2\sin^2 x}\sum_{l=1}^{n}\frac{B_l^{(n)}}{(l-1)!}\times$$
$$\times(-\sin^2 x)^l\left(\frac{d}{d\sin^2 x}\right)^l\left\{\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sh}[(\pi/2-x)rm]}{\operatorname{ch}(\pi rm/2)}\right\}, \tag{4.32}$$

где после выполнения всех дифференцирований полагаем $x=x_n=$ $={}^1/_2\arcsin(g^2/4\pi n)$, а коэффициенты $B_l^{(n)}$ определены в (4.29).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами получено решение квазипотенциального уравнения Логунова — Тавхелидзе, описывающее связанную систему двух релятивистских бесспиновых частиц одинаковой массы. Квазипотенциал взят в виде разности двух квазипотенциалов однобозонного обмена (см. (3.10) и (4.3)). Такой квазипотенциал $V(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}; \overset{0}{E})\sim\frac{1}{|\Delta_{\overset{0}{p},\overset{0}{k}}|^2}$ можно рассматривать как релятивистское геометрическое обобщение квантовомеханического кулоновского потенциала (4.2) в смысле замены разности двух векторов $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ в евклидовом нерелятивистском импульсном пространстве разностью $\overset{0}{\mathbf{p}}(-)\overset{0}{\mathbf{k}}$ (3.5) двух векторов в релятивистском импульсном пространстве Лобачевского.

Найдено релятивистское условие квантования уровней энергии связанной системы (4.25) и построены волновые функции в импульсном (4.30) и конфигурационном (4.31) представлениях.

Вопросам нахождения нормировки волновых функций, условия их ортогональности, а также описания на основе найденных волновых функций различных характеристик рассматриваемой модельной релятивистской двухчастичной системы будут посвящены следующие публикации.

В заключение авторы выражают свою искреннюю благодарность В. Г. Кадышевскому, С. П. Кулешову, Н. В. Максименко и В. И. Саврину за интерес к работе.

Литература

[1] *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.*— Nuovo Cim., 1963, *29*, № 2, 380–400.

[2] *Широков Ю. М.*— ЖЭТФ, 1958, *35*, № 4, 1005–1013. *Широков М. И., Чжоу Гуан-чжао.*— ЖЭТФ, 1958, *34*, № 5, 1230–1239.

[3] *Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N.* Relativistically covariant equations for two particles in quantum field theory. Preprint E2-3498. Dubna: JINR, 1967.

[4] *Черников Н. А.* Связь теории относительности с геометрией Лобачевского. Препринт Р2-7231. Дубна: ОИЯИ, 1961; ЭЧАЯ, 1973, *4*, № 3, 773–810. *Смородинский Я. А.*— Атомная энергия, 1963, *14*, № 1, 110–121.

[5] *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.*— Nuovo Cim., 1968, *55A*, № 2, 233–257; ЭЧАЯ 1972, *2*, № 3, 635–678.

[6] *Браун Дж. Е., Джексон А. Д.* Нуклон-нуклонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1979.

[7] *Шапиро И. С.*— ДАН СССР, 1956, *106*, 647.

[8] *Скачков Н. Б.*— ТМФ, 1975, *25*, № 3, 313.

[9] *Скачков Н. Б., Соловцов И. Л.*— ТМФ, 1979, *41*, № 2, 205–219.

[10] *Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н.* Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел. В сб.: Проблемы теоретической физики (посвященном 60-летию Н. Н. Боголюбова). М.: Наука, 1969, 261–277. *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Фриман М.*— ЯФ, 1969, *9*, № 3, 646–652.

[11] *Скачков Н. Б., Соловцов И. Л.*— ЭЧАЯ, 1978, *9*, № 1, 5–47.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию 7.IX.1981 г.

EXACT SOLUTION OF THE COVARIANT TWO-PARTICLE EQUATION WITH SUPERPOSITION OF THE ONE-BOZON EXCHANGE POTENTIALS

Kapshay V. N. Skachkov N. B.

The relativistic bound system of two scalar particles in the case of a quasipotential taken in the form of a superposition of the one-meson and one-photon propagators is considered in the Logunov – Tavkhelidze quasipotential approach. For a spherical symmetric case relativistic condition is obtained for the quantization of energy levels and wave functions are constructed in the momentum and relativistic configuration representations.