Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 533.9 ФИЗИКА

М. А. ГИНЦБУРГ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 17 XII 1970)

Нестационарные волны в плазме с магнитным полем. Решены следующие задачи: в момент времени $t = 0$ имеется цилиндрический плазменный шнур или плоский слой плазмы с плотностью, убывающей с расстоянием от оси как n_0/r^2, и с электрическим и магнитным полем, убывающим как E_0/r, H_0/r, или сферическое облако плазмы (в сферическом случае — без магнитного, но с электрическим полем E_0/r при $t = 0$). Определить движение плазмы и поле при $t > 0$. Подстановка

$$E_\Phi = \frac{1}{r}E(\eta);\ H_\Phi = \frac{1}{r}H(\eta);\ v_\Phi = v(\eta);\ n_\Phi = \frac{1}{r^2}n(\eta);\ \eta = t/r \quad (1)$$

(индексом ф отмечены физические векторы поля) позволяет свести уравнения Максвелла и уравнения двухжидкостной гидродинамики

$$\operatorname{rot} H_\Phi = j_\Phi + \partial E_\Phi/\partial t;\ \operatorname{rot} E_\Phi = -\partial H_\Phi/\partial t;\quad \partial p_{i,e}/\partial t + (v_{i,e}\nabla)p_{i,e} =$$
$$= e(E + [v_{i,e}H]);\ j_\Phi = e(n_i v_i - n_e v_e);\ \mathbf{p}_{i,e} = m\mathbf{v}_{i,e}/\sqrt{1 - v_{i,e}^2}. \quad (2)$$

к системе обыкновенных дифференциальных уравнений ([1]). Ниже излагаются результаты решения этой системы на машине.

Поменяв в ([1]) местами t и r, получим систему уравнений с независимой переменной $\xi = r/t$, описывающую растекание при заданном режиме в начале координат.

В нерелятивистском приближении существуют два предельных класса автомодельных решений (а.м.р.) системы ([1]). В решениях продольно магнитного типа (LM) отличны от нуля H_z, E_φ, u_φ, v_φ, u_r, v_r ($\mathbf{v}$ — скорость электронов, $\mathbf{u}$ — скорость ионов). В решениях продольно электрического типа (LE) отличны от нуля E_z, H_φ, u_z, v_z, u_r, v_r. Смешанные начальные условия и релятивистские члены $v(Ev)$ приводят к более сложным а.м.р.

Начнем с предельного случая $n_i = n_e = 0$ с а.м.р. в вакууме. Тогда уравнения (2) имеют точные аналитические а.м.р.:

$$H_z = H_{z0}/\sqrt{1-\eta^2};\quad E_\varphi = E_{\varphi0} + \eta H_{z0}/\sqrt{1-\eta^2};\quad E_z = E_{z0}/\sqrt{1-\eta^2};$$
$$H_\varphi = H_{\varphi0} - \eta E_{z0}/\sqrt{1-\eta^2}. \quad (3)$$

Решение с E_z, H_φ описывает процесс уменьшения электромагнитного поля при внезапном прекращении осевого тока j_z. В плоском случае:

$$H_z = (H_{z0} + \eta E_{y0})/(1-\eta^2);\quad E_y = (E_{y0} + \eta H_{z0})/(1-\eta^2). \quad (4)$$

Инвариант $E^2 - H^2 = \dfrac{(E_{y0}^2 - H_{z0}^2)}{x^2 - t^2} = (E_{y0}^2 - H_{z0}^2)\dfrac{1}{2t}\left[\dfrac{1}{x+t} - \dfrac{1}{x-t}\right]$

является функцией только от другого инварианта преобразований Лоренца — интервала $x^2 - t^2$.

А.м.р. можно получить и подстановкой $E,\ H = r^\beta f(\eta)$ (β — любое число), но только при $\beta = -1$ автомодельны также уравнения Пуассона и уравнения движения плазмы. А.м.р. типа (4) можно представить в виде суперпозиции двух волновых процессов:

$$H_{z\Phi} = \frac{H_{z0}}{2}\left[\frac{1+Q}{x-t} + \frac{1-Q}{x+t}\right];$$

$$E_{y\Phi} = \frac{E_{y0}}{2}\left[\frac{1+Q^{-1}}{x-t} + \frac{1-Q^{-1}}{x+t}\right];\quad Q = \frac{E_{y0}}{H_{z0}}. \quad (5)$$

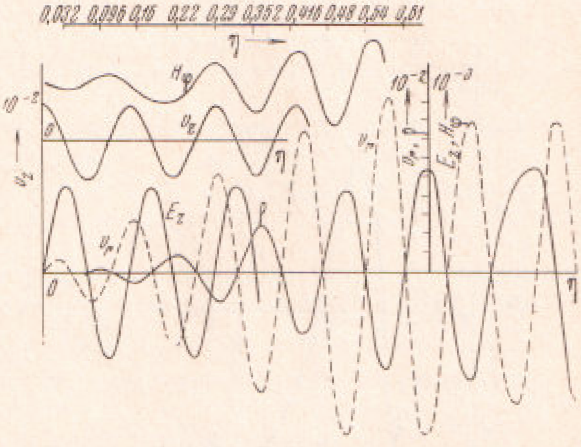

Рис. 1. Колебания плазменного шнура с продольным электронным током и с азимутальным начальным полем H_φ, $\rho = n_i - n_e$

А.м.р. для полей в вакууме найдены также в ([2]), но там иная подстановка $E \sim \frac{1}{\sqrt{r}} f(\eta)$. Подстановка $E,\ H \sim \frac{1}{r} f(\eta)$ получена в ([3]), но для иной системы уравнений, отличной от (2).

Возвратимся к а.м.р. с плазмой. Пусть плазма нерелятивистская. Тогда при $\eta = 0$ ($t = 0$) в цилиндрическом случае плазма квазинейтральна, а токи малы, т. е. поля близки к а.м.р. в вакууме (3)—(5). С ростом η растут и плазменные эффекты.

На рис. 1 показаны колебания цилиндрического плазменного шнура с продольным током в поле H_φ. Единицы измерения в уравнениях ([1]) (при $r = 1$ см) таковы: для полей $E,\ H$ Mc^2/e, для плотности $Mc^2/4\pi e^2$, для скорости — скорость света c. Начальные условия рис. 1: $v_{z0} = 0{,}02$, $n_0 = 1$, $H_{\varphi 0} = 10^{-3}$, т. е. при $r = 1$ см $n = 5\cdot 10^{11}$ см$^{-3}$, $H_\varphi = 3$ эрст. Альфеновская скорость $v_A = H/\sqrt{n} \ll 1$, движение нерелятивистское. Ток nev_z создает переменное поле H_φ. Поле H_φ генерирует вихревое электрическое поле E_z, которое приводит в движение электроны и порождает ($v_z' = -\lambda E_z n/n_0$; $E_z' = nv_z$) ленгмюровские колебания неоднородной плазмы:

$$v_z = v_{z0}\cos\sqrt{\lambda n_0}\,\eta = v_{z0}\cos\omega_0 t;$$
$$\omega_0^2(r) = 4\pi e^2 n_0(r)/m;$$
$$\lambda = M/m,$$

их период $T = 2\pi/\sqrt{\lambda n_0} = 0{,}15$ согласуется с результатами рис. 1.

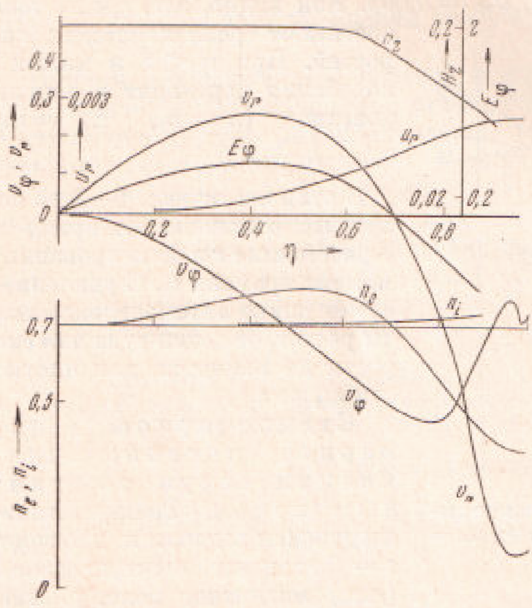

Рис. 2. Растекание плазменного шнура в продольном магнитном поле H_z

На рис. 2 показана эволюция шнура в начальном продольном поле ($H_{z0} = 0{,}2$, $u_{z0} = 0{,}02$, $n_0 = 0{,}7$; $v_A \leqslant 1$). Поле H_z порождает по а.м.р. в вакууме (3) компоненту E_φ, а она, в свою очередь, электронный ток v_z. При $\eta > 0{,}3$ существенны эффекты разделения зарядов, возникает и максимум электронной плотности, движущийся наружу. По-прежнему имеют место колебания, но уже иной природы — не ленгмюровские ($E_\varphi' = H_z + nv_\varphi$, но $H_z > nv_\varphi$, т. е. при $\eta < 1$ плазма еще квазинейтральна). Частицы ускоряются до релятивистских энергий.

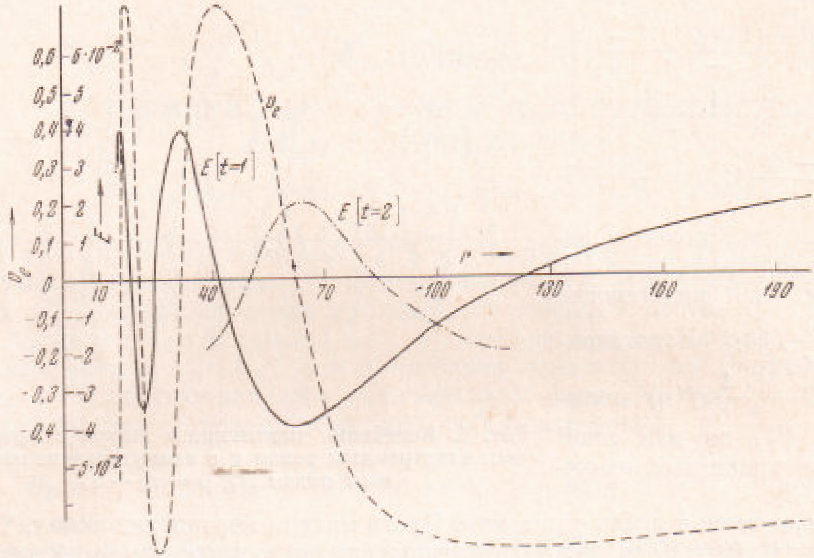

Рис. 3. Автомодельная волна в плазменном шнуре в радиальном электрическом поле (релятивистский случай)

Разлет плазменного шнура в электрическом поле E_r (рис. 3). При $t = 0$ $E_r = 0{,}04$, $v_{r0} = 0{,}005$. Как видно, электроны тоже достигают релятивистских скоростей. При $\eta < 1$ и малых v колебания переходят в ленгмюровские ($n = n_0$, $E_r' = nv_r$, $v_r' - \lambda \frac{n}{n_0} E_r$).

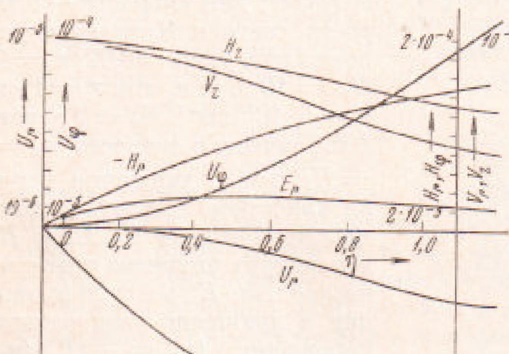

Рис. 4. Стационарное двумерное течение плазмы с магнитным полем. $H_{z0} = 2 \cdot 10^{-4}$; $n_0 = 0{,}1$; $u_{z0} = v_{z0} = 0{,}001$

В отличие от рис. 1—2 по оси абсцисс отложено не время η, а расстояние r в фиксированный момент времени t_0. С удалением от оси длина автомодельной волны растет, ее амплитуда для скорости не меняется, для плотности падает.

Стационарное двумерное течение плазменной струи с магнитным полем. Решена также следующая задача: в плоскости $z = 0$ заданы электрическое и (или) магнитное поле, убывающее с расстоянием от оси как $1/r$, а также вектор скорости плазменной струи, текущей сквозь эту плоскость. При $z = 0$ плотность $n_\Phi = n_0 / r^2$. Требуется найти стационарное ($\partial / \partial t \equiv 0$) течение в полупространстве $z > 0$, удовлетворяющее этим граничным условиям. Заменяем в подстановке (1) t на z и находим систему автомодельных уравнений, которую решаем численно (рис. 4). Подстановка $\eta = z / r$ позволяет найти стационарные а.м.р. и в вакууме:

$$H_z = H_{z0}/\sqrt{1+\eta^2}; \quad H_r = H_{r0} - \eta H_{z0}/\sqrt{1+\eta^2};$$
$$H_x = (H_{x0} - \eta H_{z0})/(1+\eta^2); \quad H_z = (H_{z0} + \eta H_{x0})/(1+\eta^2). \tag{6}$$

При малых углах $\eta \ll 1$ осуществляются именно «вакуумные» а.м.р. ([6]). H_z падает, $-H_r$ растет — силовые линии загибаются к оси. Плазма тоже движется к оси ($u_r < 0$, $v_r < 0$). При бо́льших углах появляются пространственный заряд и поля E_r, E_z и H_φ, плазма меняет структуру вакуумного поля.

Уравнения (2) при $\eta > c/v_{T,e}$ уже не применимы. Аналогичным образом область применимости а.м.р. для плазмы с горячими электронами ($n_e \sim e^\varphi$, см. ([1])) ограничена условиями $\sqrt{T_e/T_i} > \eta > \sqrt{m/M}$, эти неравенства позволяют найти интеграл полного числа частиц и определить константу автомодельного движения).

Тепловое движение можно учесть автомодельным кинетическим уравнением. Для простоты проведем все выкладки для плоского случая. Функции распределения электронов $\tilde{f}_e$ и ионов $\tilde{f}_i$ ищем в виде $\tilde{f}_{e,i} = \frac{1}{x^2} f_{e,i}$.

Уравнения Максвелла удается проинтегрировать по переменной η:

$$E_x = E_{x0} + \iiint (f_i - f_e)\, v_x v^2 dv\, d\eta, \quad E_y = \frac{1}{1-\eta^2}\Big\{E_{y0} + \eta H_{z0} -$$
$$- \iiint (f_i - f_e)\, v_y v^2 dv\, d\eta\Big\},$$
$$H_z = \frac{1}{1-\eta^2}\Big\{H_{z0} + \eta E_{y0} - \eta \iiint (f_i - f_e)\, v_y v^2 dv\, d\eta\Big\}.$$

Подставляя эти выражения в кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m}\Big(\mathbf{E} + \frac{1}{\gamma c}[\mathbf{pH}]\Big)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{p}} = 0; \; \gamma^2 = \Big[\frac{p^2}{p^2+1}\Big]^{-1},$$

получаем систему двух уравнений для f_i и f_e с независимыми переменными η и $\mathbf{p}$.

Применяя уравнения Максвелла в интегральной форме, убеждаемся, что в задачах с цилиндрической симметрией на оси присутствуют заряды. В двумерном течении холодной плазмы (рис. 4) — это магнитные заряды (например, постоянные магниты). В нестационарном течении плазмы с горячими электронами (([1]), $n_e = e^\varphi$) на оси присутствует электрический заряд $\varkappa T_e/e$, поле которого препятствует убеганию электронов.

Первое знакомство с общими свойствами автомодельных решений и советы, как их искать, автор получил в теоретическом отделе Л. В. Овсянникова в Институте гидромеханики СО АН СССР в 1966 г. и благодарит за это Л. В. Овсянникова, Н. Х. Ибрагимова и В. В. Пухначева.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
п. о. Академгородок Подольск. р-на Моск. обл.

Поступило
15 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Гинцбург, Астр. журн., 46, 1019 (1969). [2] Е. И. Забабахин, ЖЭТФ, 33, 432 (1957). [3] В. П. Коробейников, Магнитная гидродинамика, 3, 55 (1967).