



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Толкачёв, А. А. Шамына, В. Н. Капшай, Генерация второй гармоники-
суммарной частоты в тонком сферическом слое. IV. Оптимизационный анализ,
Оптика и спектроскопия, 2021, том 129, выпуск 12, 1568–1582

DOI: 10.21883/OS.2021.12.51745.2388-21

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

25 октября 2024 г., 11:55:42



06

Генерация второй гармоники—суммарной частоты в тонком сферическом слое. IV. Оптимизационный анализ

© А.И. Толкачёв, А.А. Шамына, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
246019 Гомель, Республика Беларусь

e-mail: anton.talkachov@gmail.com, anton.shamyna@gmail.com, kapshai@rambler.ru

Поступила в редакцию 06.06.2021 г.

В окончательной редакции 23.08.2021 г.

Принята к публикации 02.09.2021 г.

Произведена численная максимизация интенсивности генерируемого излучения второй гармоники—суммарной частоты от тонкого сферического слоя. Обнаружено, что для всех рассмотренных типов анизотропии и размеров сферического слоя максимум интенсивности наблюдается при одних и тех же параметрах задачи, и генерируемая пространственная плотность мощности возрастает с увеличением размера частиц. Показано, что при больших размерах частицы интенсивность генерируемого излучения пропорциональна четвертой степени радиуса частицы. Для одного из типов анизотропии в случае сонаправленного падения волн на сферическую частицу малого радиуса аналитически найден закон распределения генерируемой плотности мощности.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, генерация суммарной частоты, диэлектрическая сферическая частица, оптимизация, мощность излучения.

DOI: 10.21883/OS.2021.12.51745.2388-21

Глобальная оптимизация пространственной плотности мощности генерируемого излучения

Экспериментальная регистрация нелинейных оптических эффектов второго порядка является сложной задачей, поскольку генерируемые поля имеют малую интенсивность [1]. Генерация второй гармоники—суммарной частоты существенно отличается от генерации второй гармоники [2,3] количеством варьируемых параметров. Из-за этого в эксперименте возникает сложность выбора оптимальных сочетаний семи изменяемых параметров и направления наблюдения (характеризуемого углами θ, φ), соответствующих наиболее эффективной генерации. Для решения этой проблемы проведем численную максимизацию энергетических характеристик генерации второй гармоники—суммарной частоты.

После анализа выражений (24), (25) части I становится ясно, что чем больше параметр $|\eta|$ (равный отношению модулей амплитуд напряженностей падающих волн), тем выше интенсивность генерируемого электромагнитного излучения при неизменной мощности первого источника. Это связано с тем, что увеличивается мощность второго источника. Поэтому для анализа эффективности генерации второй гармоники—суммарной частоты зафиксируем суммарную мощность падающих волн. Для этого введем нормированные плотность мощности и полную мощность генерируемого излучения следующим образом:

$$S_{\text{norm}}^{(2\omega)} = \frac{S_r^{(2\omega)}}{(1 + |\eta|^2)^2} = \frac{c}{8\pi} \frac{n_{2\omega}}{\mu_{2\omega}} \left| \frac{\mathbf{E}^{(2\omega)}}{1 + |\eta|^2} \right|^2$$

$$= 32\pi c \frac{\mu_{2\omega} n_{2\omega}}{n_{\omega}^4} \frac{d_0^2}{r^2} (k_{\omega} a)^4 |E_1|^4$$

$$\times \left| (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \frac{\mathbf{f}^{(2\omega)}}{1 + |\eta|^2} \right|^2 = S_0(k_{\omega} a) s_{\text{norm}}^{(2\omega)}, \quad (1)$$

$$W_{\text{norm}}^{(2\omega)} = \int_{4\pi} S_{\text{norm}}^{(2\omega)} r^2 d\Omega = S_0(k_{\omega} a) r^2$$

$$\times \int_{4\pi} s_{\text{norm}}^{(2\omega)} d\Omega = S_0(k_{\omega} a) r^2 w_{\text{norm}}^{(2\omega)}, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$S_0(k_{\omega} a) = 32\pi c \frac{\mu_{2\omega} n_{2\omega}}{n_{\omega}^4} \frac{d_0^2}{r^2} (k_{\omega} a)^4 |E_1|^4,$$

$$s_{\text{norm}}^{(2\omega)} = \left| (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \frac{\mathbf{f}^{(2\omega)}}{1 + |\eta|^2} \right|^2,$$

$$w_{\text{norm}}^{(2\omega)} = \int_{4\pi} s_{\text{norm}}^{(2\omega)} d\Omega. \quad (3)$$

Здесь S_0 — вспомогательная величина, характеризующая интенсивность генерируемого излучения второй гармоники—суммарной частоты; $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ — величина, характеризующая интенсивность и распределение генерируемого излучения (она зависит от $\theta, \varphi, k_{\omega} a, \gamma, |\eta|, \arg \eta, \varphi_{\text{in}}^{(1)}, \varphi_{\text{in}}^{(2)}, \sigma_1, \sigma_2$); $w_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ — величина, характеризующая

Таблица 1. Максимальные значения вспомогательной плотности мощности s_i и соответствующие им оптимальные значения радиуса частицы

№	Параметр	Значения параметра				
		$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	MG
1	Тип анизотропии (i)					
2	s_i	0.225	0.750	3.016	0.376	0.302
3	$k_{\omega a}$	12.328	8.471	12.651	1.173	8.213

Таблица 2. Значения оптимальных параметров для анизотропии типа $\chi_3^{(2)}$ при различных значениях радиуса частицы

№	Параметр	Значения параметра		
		[0.05; 0.229]	(0.229; 0.726]	(0.726; 20]
1	Область $k_{\omega a}$	[0.05; 0.229]	(0.229; 0.726]	(0.726; 20]
2	γ_{\max} , rad	2.57 (рис. 1, c)	рис. 1, c	0
3	$ \eta_{\max} $	рис. 1, d	1	1
4	$\arg \eta_{\max}$, rad	0	0	0
5	$\sigma_{1, \max}$	0	0	0
6	$\sigma_{2, \max}$	0	0	0
7	$\varphi_{\text{in}, \max}^{(1)}$, rad	$\pm \pi/2$	$-\varphi_{\text{in}, \max}^{(2)}$	$\forall \varphi_{\text{in}, \max}^{(1)}$
8	$\varphi_{\text{in}, \max}^{(2)}$, rad	$-\varphi_{\text{in}, \max}^{(1)}$	рис. 1, e	$\varphi_{\text{in}, \max}^{(1)}$
9	θ_{\max} , rad	2.30	рис. 1, b	рис. 1, b
10	φ_{\max} , rad	$\pm \pi/2$	0	$\varphi_{\text{in}, \max}^{(1)} + \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$)

полную генерируемую мощность (она зависит от $k_{\omega a}$, γ , $|\eta|$, $\arg \eta$, $\varphi_{\text{in}}^{(1)}$, $\varphi_{\text{in}}^{(2)}$, σ_1 , σ_2). Функции $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ и $w_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ будем называть вспомогательной плотностью мощности и вспомогательной полной мощностью излучения второй гармоники–суммарной частоты соответственно. Введение данных величин связано с тем, что увеличение размера частицы $k_{\omega a}$ в большинстве случаев приводит к возрастанию и генерируемой плотности мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$, и полной генерируемой мощности $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$. Характер роста данных функций исследуется как в теоретических работах, так и в экспериментальных [1]. Он может быть удобно определен с использованием функций $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ и $w_{\text{norm}}^{(2\omega)}$. Так, если вспомогательная плотность мощности $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ возрастает при увеличении значения параметра $k_{\omega a}$, то плотность мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ возрастает быстрее, чем $(k_{\omega a})^4$, и наоборот. В случае, когда нормированная плотность мощности $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ остается приблизительно постоянной, можно заключить, что плотность мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ практически пропорциональна $(k_{\omega a})^4$. Исследуя поведение вспомогательной функции $w_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ можно сделать аналогичные выводы для полной генерируемой мощности $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$. Более того, зависимости $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ и $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ от остальных параметров возбуждающего излучения содержатся только во вспомогательных функциях $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ и $w_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ соответственно. Именно для вспомогательных плотности мощности $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ и полной мощности $w_{\text{norm}}^{(2\omega)}$

далее в работе производится поиск оптимальных параметров задачи, при которых генерация наиболее эффективна.

Численные результаты оптимизации получены многократным применением модифицированного метода Ньютона при случайно заданных начальных значениях параметров. При этом найденные значения для каждого из параметров генерируемой плотности мощности и полной мощности приведены с точностью до трех знаков после десятичной точки.

Отметим, что из-за свойств замены 1–5, описанных в части III (формулы (8)–(23)), результаты оптимизации являются множественными, т.е. возможны несколько комбинаций значений параметров, при которых достигается одно и то же максимальное значение пространственной плотности мощности или полной мощности. Поэтому для единообразия представления полученных результатов в работе приведены комбинации параметров, для которых $|\eta| \leq 1$.

Во всех дальнейших рассуждениях неизменяемой характеристикой частицы и среды будем считать показатель дисперсии $\xi = 1.34/1.33$. Произведем численную максимизацию вспомогательной плотности мощности $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ по всем возможным варьируемым параметрам $(\theta, \varphi, \gamma, |\eta|, \arg \eta, \varphi_{\text{in}}^{(1)}, \varphi_{\text{in}}^{(2)}, \sigma_1, \sigma_2)$ для различных фиксированных значений параметра $k_{\omega a}$. Диапазон анализируемых значений $k_{\omega a}$ выберем в пределах от 0.05 до 20, что соответствует радиусу частицы, имеющему порядок от десятков нанометров до микрометров при длине волны падающего излучения не более $1 \mu\text{m}$. Частицы таких размеров и источники с рабочей длиной волны из указанного диапазона наиболее часто используют в экспериментах по нелинейной генерации [3,4]. Рассматриваемые диапазоны изменения остальных параметров приведены ниже:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad |\eta| \leq 1, \\
 -\pi < \arg \eta \leq \pi, \\
 -\pi < \varphi_{\text{in}}^{(1)} \leq \pi, \quad -\pi < \varphi_{\text{in}}^{(2)} \leq \pi, \\
 -1 \leq \sigma_1 \leq 1, \quad -1 \leq \sigma_2 \leq 1.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Оптимизацию будем проводить отдельно для всех четырех типов анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$, определенных в части II, а также для тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости $\chi_{ijk}^{(2)}$, соответствующего малахитовому зеленому (malachite green, MG). Анизотропные свойства оптически нелинейного слоя характеризуются главным образом относительными значениями независимых компонент тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ (например, $\chi_1^{(2)}/\chi_2^{(2)}$, $\chi_3^{(2)}/\chi_2^{(2)}$, $\chi_4^{(2)}/\chi_2^{(2)}$), а одновременное пропорциональное увеличение всех независимых компонент приводит только к росту плотности мощности генерируемого излучения пропорционально квадратам их

Таблица 3. Значения оптимальных параметров для анизотропии типа $\chi_4^{(2)}$ при различных значениях радиуса частицы

№	Параметр	Значения параметра			
		[0.05; 2.062]	(2.062; 5.567]	(5.567; 12.403]	(12.403; 20]
1	Область $k_{\omega}a$	[0.05; 2.062]	(2.062; 5.567]	(5.567; 12.403]	(12.403; 20]
2	γ_{\max} , rad	0	рис. 1, <i>f</i>	рис. 1, <i>f</i>	рис. 1, <i>f</i>
3	$ \eta_{\max} $	1	рис. 1, <i>g</i>	рис. 1, <i>g</i>	рис. 1, <i>g</i>
4	$\arg \eta_{\max}$, rad	0	0	0	0
5	$\sigma_{1,\max}$	0	0	0	0
6	$\sigma_{2,\max}$	0	0	0	0
7	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$, rad	$\forall \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$\pm \pi/2$	$\pm \pi/2$	$\pm \pi/2$
8	$\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}$, rad	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$-\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$
9	θ_{\max} , rad	рис. 1, <i>b</i>	рис. 1, <i>b</i>	рис. 1, <i>b</i>	рис. 1, <i>b</i>
10	φ_{\max} , rad	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} + \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$)	$\pm \pi/2$	$\pm \pi/2$	$\pm \pi/2$

Таблица 4. Значения оптимальных параметров для типа анизотропии, соответствующего малахитовому зеленому, при различных значениях радиуса частицы

№	Параметр	Значения параметра		
		[0.05; 0.569]	(0.569; 0.645]	(0.645; 20]
1	Область $k_{\omega}a$	[0.05; 0.569]	(0.569; 0.645]	(0.645; 20]
2	γ_{\max} , rad	0	0	0
3	$ \eta_{\max} $	1	1	1
4	$\arg \eta_{\max}$, rad	0	0	0
5	$\sigma_{1,\max}$	0	0	0
6	$\sigma_{2,\max}$	0	0	0
7	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$, rad	$\forall \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$\forall \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$\forall \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$
8	$\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}$, rad	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$
9	θ_{\max} , rad	рис. 1, <i>b</i>	рис. 1, <i>b</i>	рис. 1, <i>b</i>
10	φ_{\max} , rad	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} + \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$)	рис. 1, <i>h</i>	$\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} \pm \pi/2$

Таблица 5. Значения максимальной генерируемой вспомогательной плотности мощности второй гармоники–суммарной частоты и оптимальных параметров при фиксированных $k_{\omega}a = 0.1$, $\varphi_{\text{in}}^{(1)} = \pi/2$, $\varphi_{\text{in}}^{(2)} = 0$

№	Параметр	Значения параметра				
		$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	MG
1	Тип анизотропии (<i>i</i>)	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	MG
2	$\max [s_{\text{norm}}^{(2\omega)}] \cdot 10^3$ $\theta, \varphi, \gamma,$ η, σ_1, σ_2	1.234	8.747	21.467	0.129	4.439
3	γ_{\max} , rad	0.021	0	2.421	0.202	0.039
4	$ \eta_{\max} $	0.706	0.577	0.980	0.856	0.595
5	$\arg \eta_{\max}$, rad	$\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
6	$\sigma_{1,\max}$	0.002	0.172	0.885	-0.221	0.150
7	$\sigma_{2,\max}$	-1	-1	-1	-1	-1
8	θ_{\max} , rad	0.949	1.563	2.831	2.115	1.933
9	φ_{\max} , rad	$-\pi/2$	$\forall \varphi_{\max}$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$

величин, не влияя на его пространственное распределение. Поэтому для объективности сравнения генерируемой мощности для различных типов анизотропии

произведем такую нормировку, чтобы сумма квадратов независимых компонент тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ равнялась единице ($(\chi_1^{(2)})^2 + (\chi_2^{(2)})^2 + (\chi_3^{(2)})^2 + (\chi_4^{(2)})^2 = 1$). Тогда на основе экспериментальных данных, приведенных в работе [5], получим значения независимых компонент этого тензора, соответствующие малахитовому зеленому, в виде $\chi_1^{(2)} = -0.627$, $\chi_2^{(2)} = 0.778$, $\chi_3^{(2)} = -0.021$, $\chi_4^{(2)} = 0$.

Для каждого из рассмотренных типов анизотропии ($\chi_{1-4}^{(2)}$ и малахитового зеленого) глобальный максимум пространственной плотности мощности при $k_{\omega}a < 20$ достигается при линейной поляризации исходных волн и совпадении их фаз в центре частицы:

$$\sigma_{1,\max} = \sigma_{2,\max} = 0, \arg \eta_{\max} = 0. \tag{5}$$

Стоит отметить, что эта же закономерность сохраняется и для генерации в нелинейном слое, обладающем исключительно некиральными свойствами ($\chi_{1-3}^{(2)} \neq 0$, $\chi_4^{(2)} = 0$) или исключительно киральными ($\chi_{1-3}^{(2)} = 0$, $\chi_4^{(2)} \neq 0$). Однако если нелинейный слой обладает одновременно киральными ($\chi_4^{(2)} \neq 0$) и некиральными (любой из коэффициентов $\chi_{1-3}^{(2)}$ не равен нулю) свойствами, то максимальная мощность генерации в общем случае может наблюдаться при эллиптической поляризации падающего излучения.

Численный анализ также показал, что для значений $k_{\omega}a$ не более 20 значения параметров γ , η , $\varphi_{\text{in}}^{(1)}$, $\varphi_{\text{in}}^{(2)}$, σ_1 , σ_2 , при которых достигаются максимумы для типов анизотропии $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_2^{(2)}$, одинаковы:

$$\gamma_{\max} = 0, \eta_{\max} = 1, \forall \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}, \varphi_{\text{in,max}}^{(2)} = \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}, \sigma_{1,\max} = \sigma_{2,\max} = 0. \tag{6}$$

Это является ожидаемым результатом, поскольку векторы поляризации падающих волн в этом случае совпадают по направлению и по фазе. Как следствие, интенсивность результирующего поля возбуждающего излучения максимальна, что является одной из возможных причин максимального нелинейного отклика. Однако оптимальный азимутальный угол наблюдения φ_{\max}

Таблица 6. Значения вспомогательной полной генерируемой мощности второй гармоники–суммарной частоты и оптимальных параметров при $k_{\omega}a = 0.1$, $\varphi_{in}^{(1)} = \pi/2$, $\varphi_{in}^{(2)} = 0$

№	Параметр	Значения параметра				
		$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	MG
1	Тип анизотропии (i)	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$	MG
2	$\max_{\gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2} [w_{norm}^{(2\omega)}] \cdot 10^3$	7.194	73.277	179.233	0.576	32.738
3	γ_{max}, rad	π	0	π	0	0
4	$ \eta_{max} $	1	0.577	1	1	0.587
5	$\arg \eta_{max}, \text{rad}$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$
6	$\sigma_{1,max}$	1	0.172	1	1	0.160
7	$\sigma_{2,max}$	-1	-1	-1	1	-1

для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$ равен $\varphi_{in,max}^{(1)} + \pi m (m \in \mathbb{Z})$, а для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ может быть произвольным в пределах (4). Это объясняется следующим образом: для параметров (6) задача о генерации второй гармоники–суммарной частоты сводится к задаче о генерации второй гармоники, и в случае типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ пространственное распределение излучения второй гармоники (диаграмма направленности) обладает аксиальной симметрией [2]. Более подробно местоположение глобального максимума для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ обсуждается в Приложении А.

Максимальные значения вспомогательной плотности мощности s_i (i — принимает значения $\chi_1^{(2)}$, $\chi_2^{(2)}$, $\chi_3^{(2)}$, $\chi_4^{(2)}$ или MG) для каждого из типов анизотропии определяются следующим образом:

$$s_i = \max_{\substack{k_{\omega}a, \theta, \varphi, \gamma, \eta, \\ \varphi_{in}^{(1)}, \varphi_{in}^{(2)}, \sigma_1, \sigma_2}} [s_{norm}^{(2\omega)}] \quad (7)$$

и приведены в табл. 1. Здесь функция \max численно равна максимальному значению указанной в квадратных скобках величины при варьировании параметров, приведенных под именем функции \max , в соответствующих пределах (4).

Как видно из табл. 1, максимальная вспомогательная плотность мощности сильно отличается для различных типов анизотропии. Для того чтобы на графиках зависимости максимальной вспомогательной плотности мощности $s_{norm}^{(2\omega)}$ от $k_{\omega}a$ значения функций не превышали единицу, проведем нормировку на величины s_i :

$$\hat{s}_{norm,max}^{(2\omega)} = \max_{\substack{\theta, \varphi, \gamma, \eta, \\ \varphi_{in}^{(1)}, \varphi_{in}^{(2)}, \sigma_1, \sigma_2}} [s_{norm}^{(2\omega)}] / s_i \quad (8)$$

Графики зависимостей такой максимальной нормированной вспомогательной плотности мощности $\hat{s}_{norm,max}^{(2\omega)}$ от $k_{\omega}a$ приведены на рис. 1, а. Для типов анизотропии $\chi_{1,2,3}^{(2)}$ и малахитового зеленого они имеют вид монотонно возрастающих кривых, которые стремятся к постоянным значениям при $k_{\omega}a > 7$. А для типа

анизотропии $\chi_4^{(2)}$ увеличение размера частицы в области $k_{\omega}a > 13$ ведет к тому, что $\hat{s}_{norm,max}^{(2\omega)}$ плавно меняется вблизи постоянного значения. Это означает, что при больших размерах частицы максимальные значения плотности генерируемой мощности второй гармоники–суммарной частоты пропорциональны $(k_{\omega}a)^4$.

На рис. 1, б–h приведены отдельные зависимости от радиуса сферического слоя $k_{\omega}a$ для параметров задачи, при которых достигается максимальная вспомогательная плотность мощности генерации. При этом на рис. 1 можно видеть только те зависимости, которые не удалось выразить в виде простых формул.

На рис. 1, б представлены графики зависимостей оптимального полярного угла наблюдения θ_{max} максимальной вспомогательной плотности мощности $s_{norm}^{(2\omega)}$ от параметра $k_{\omega}a$. Графики зависимостей $\theta_{max}(k_{\omega}a)$ имеют вид монотонно убывающих кривых, стремящихся к нулю при больших размерах частицы, т. е. направление, в котором генерируется максимальная мощность, приближается к направлению вектора $\mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)}$. На диаграммах направленности, описанных в части II (например, рис. 3, f), это проявляется в виде приближения главных лепестков к положительному направлению оси Oz . Частично это можно объяснить свойствами сферических функций Бесселя при больших значениях аргумента, описанными в части I.

Для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ на графике $\theta_{max}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, б) можно выделить три области параметра $k_{\omega}a$ с различным поведением функции. Значения оптимальных параметров и способы их нахождения (формулы, графики) для каждой области в краткой форме приведены в табл. 2. В каждой строке табл. 2 приведены значения соответствующего параметра для различных диапазонов изменения $k_{\omega}a$, причем каждой графе соответствует свой диапазон. Если в ячейке таблицы указано числовое значение, то подразумевается, что соответствующий параметр принимает это значение в соответствующем диапазоне. Если в ячейке таблицы указано число π или $\pi/2$, то значение параметра с точностью до трех знаков после десятичной точки совпадает соответственно со значением π или $\pi/2$. Если в ячейке таблицы указана формула, то значение соответствующего параметра вычисляется на основе значений других параметров посредством указанной формулы. Символ \forall означает, что параметр может принимать любое значение, соответствующее условиям (4). Если в ячейке таблицы указана ссылка на рисунок, то подразумевается, что в этом диапазоне значение соответствующего параметра можно найти из графика на указанном рисунке. Аналогичные обозначения используются и в следующих таблицах. Далее дадим более подробное описание приведенных в табл. 2 закономерностей.

Первая область изменения параметра $k_{\omega}a$ задается условием $k_{\omega}a \leq 0.229$. В данной области угол θ_{max} почти не меняется и приблизительно равен 2.30, а

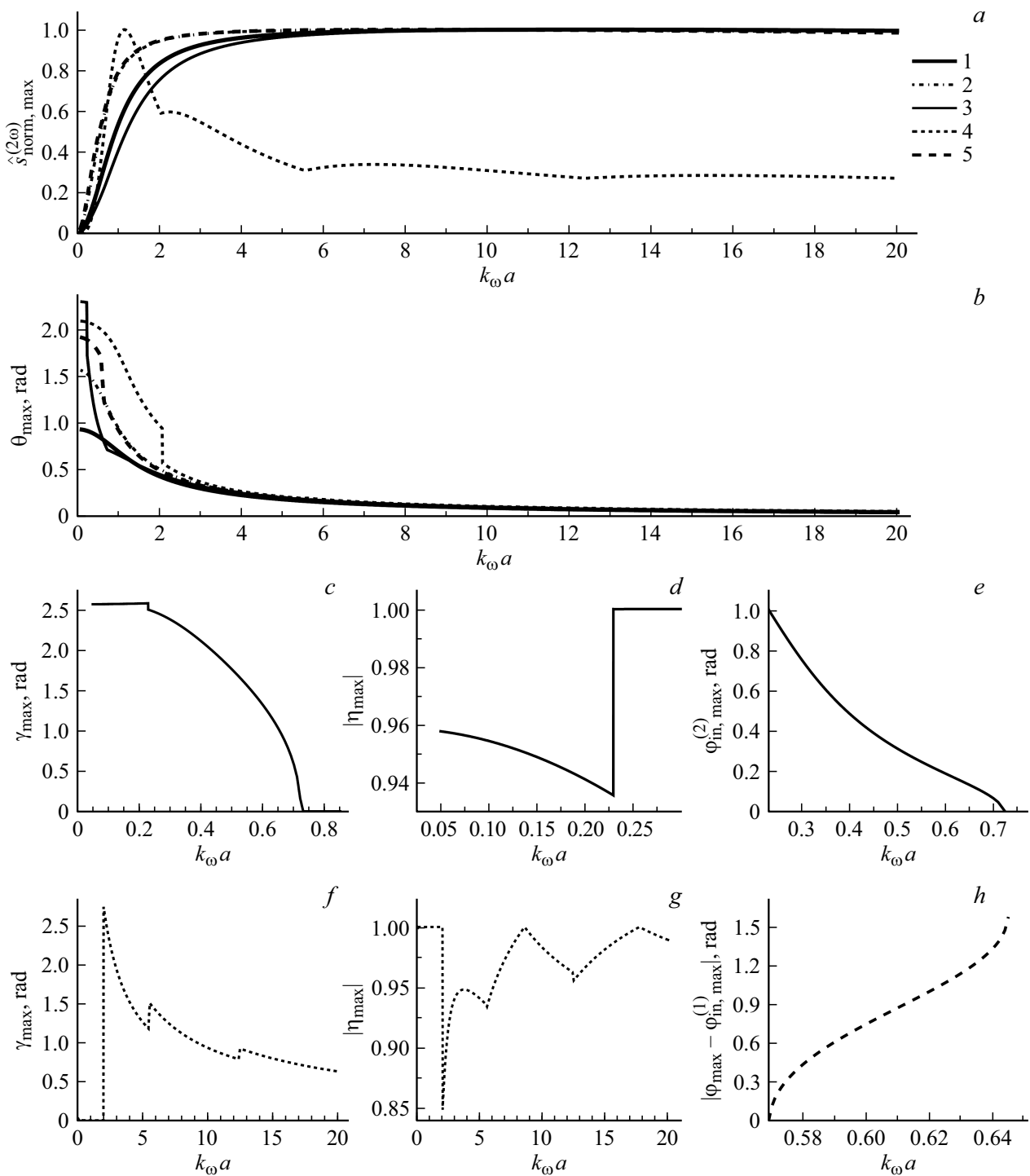


Рис. 1. Зависимости максимальной вспомогательной плотности мощности и оптимальных параметров от радиуса сферического слоя. Зависимости для всех типов анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$ и MG: *a* — максимальная вспомогательная плотность мощности, *b* — полярный угол наблюдения; только для анизотропии типа $\chi_3^{(2)}$: *c* — угол раскрытия, *d* — модуль отношения комплексных амплитуд падающих волн, *e* — угол ориентации эллипса поляризации второй волны; только для анизотропии типа $\chi_4^{(2)}$: *f* — угол раскрытия, *g* — модуль отношения комплексных амплитуд падающих волн; только для анизотропии типа MG: *h* — модуль разности азимутального угла наблюдения и угла, характеризующего наклон плоскости поляризации первой волны относительно оси Ox . Типы анизотропии: 1 — $\chi_1^{(2)}$, 2 — $\chi_2^{(2)}$, 3 — $\chi_3^{(2)}$, 4 — $\chi_4^{(2)}$, 5 — MG.

также практически постоянен оптимальный угол раскрытия ($\gamma_{\max} \approx 2.57$). График зависимости γ_{\max} от $k_{\omega}a$

представлен на рис. 1, *c*. Зависимость параметра $|\eta_{\max}|$ от $k_{\omega}a$ (рис. 1, *d*) в данной области имеет убывающий

вид. Углы $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$, $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}$, характеризующие ориентации эллипсов поляризации исходных волн, принимают значения $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} = \pm\pi/2$, $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)} = -\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$, а угол наблюдения φ_{max} при этом равен $\pm\pi/2$.

На границе первой и второй областей θ_{max} (рис. 1, *b*) и γ_{max} (рис. 1, *c*) скачкообразно уменьшаются. Вторая область задается неравенством $0.229 < k_{\omega}a \leq 0.726$. При таких размерах частицы $|\eta_{\text{max}}| = 1$ (рис. 1, *d*), но на графике участок $k_{\omega}a > 0.3$ не приведен, поскольку на его протяжении $|\eta_{\text{max}}|$ равен единице и не изменяется. Графики зависимостей $\theta_{\text{max}}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *b*), $\gamma_{\text{max}}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *c*), $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *e*) имеют вид монотонно убывающих кривых. Зависимость угла $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$ от $k_{\omega}a$ в точности противоположна зависимости $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}(k_{\omega}a)$ ($\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}(k_{\omega}a) = -\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}(k_{\omega}a)$), а оптимальный угол наблюдения φ_{max} равен нулю.

На границе второй и третьей областей углы наклона касательных к графикам функций $\theta_{\text{max}}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *b*) и $\gamma_{\text{max}}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *c*) скачкообразно изменяются. Третья рассматриваемая область ограничена неравенством $0.726 < k_{\omega}a \leq 20$. В данной области оптимальные параметры задачи имеют вид (6).

В случае анизотропии типа $\chi_4^{(2)}$ на графике зависимости $\hat{s}_{\text{norm,max}}^{(2\omega)}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *a*) в рассматриваемом диапазоне изменения радиуса нелинейного слоя можно отметить четыре области, соприкасающиеся в точках $k_{\omega}a = 2.062$, $k_{\omega}a = 5.567$, $k_{\omega}a = 12.403$. Также эти области можно наглядно видеть на графиках $\gamma_{\text{max}}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *f*) и $|\eta_{\text{max}}|(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *g*). Во всех областях, кроме первой, функция $\gamma_{\text{max}}(k_{\omega}a)$ монотонно убывает, а зависимость $|\eta_{\text{max}}|$ от $k_{\omega}a$ имеет по одному локальному максимуму. Функция $\hat{s}_{\text{norm,max}}^{(2\omega)}(k_{\omega}a)$ имеет локальный максимум в каждой из выделенных областей, однако глобальный максимум находится в первой области. На границе каждой из областей γ_{max} скачкообразно увеличивается. А на графике максимальной вспомогательной плотности мощности на границах областей происходит скачкообразное изменение угла наклона касательной к графику. На графике зависимости $|\eta_{\text{max}}|$ от $k_{\omega}a$ при переходе от одной области к другой скачкообразно изменяется и значение функции, и ее производная, кроме границы второй и третьей областей, где изменяется только производная функции.

Оптимальные параметры генерации для каждой из областей приведены в табл. 3. Обозначения аналогичны обозначениям для табл. 2. В первой области оптимальные параметры определяются соотношением (6). На границе первой и второй областей θ_{max} (рис. 1, *b*) и $|\eta_{\text{max}}|$ (рис. 1, *g*) скачкообразно уменьшаются. Во второй области ($2.062 < k_{\omega}a \leq 5.567$) оптимальные углы ориентации эллипсов поляризации имеют вид $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} = \pm\pi/2$, $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)} = \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$, а оптимальный угол наблюдения φ_{max} равен $\pm\pi/2$. В третьей области углы задаются выражениями $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} = \pm\pi/2$, $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)} = -\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$, $\varphi_{\text{max}} = \pm\pi/2$.

В четвертой области ($12.403 < k_{\omega}a \leq 20$) оптимальные параметры таковы: $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} = \pm\pi/2$, $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)} = \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$, $\varphi_{\text{max}} = \pm\pi/2$, что совпадает с соответствующими значениями параметров во второй выделенной области для данного типа анизотропии.

Для типа анизотропии, соответствующего малахитовому зеленому, выделим три характерные области, каждой из которых соответствует свое поведение графика зависимости $\theta_{\text{max}}(k_{\omega}a)$ (рис. 1, *b*). Во всех выделенных областях значения оптимизированных γ_{max} и $|\eta_{\text{max}}|$ постоянны и равны 0 и 1 соответственно. В первой области ($k_{\omega}a \leq 0.569$) оптимальные параметры задачи имеют вид (6). Во второй области ($0.569 < k_{\omega}a \leq 0.645$) параметры $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$ и $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}$ могут принимать любые совпадающие значения. Оптимальное значение угла наблюдения φ_{max} зависит от угла $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$ таким образом, чтобы модуль их разности принимал соответствующие значения, приведенные на графике зависимости $|\varphi_{\text{max}} - \varphi_{\text{in,max}}^{(1)}|$ от $k_{\omega}a$ (рис. 1, *h*). Этот график представляет собой монотонно возрастающую зависимость в данном диапазоне изменения параметра $k_{\omega}a$. В третьей области ($0.645 < k_{\omega}a \leq 20$), как и во второй, параметры $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)}$ и $\varphi_{\text{in,max}}^{(2)}$ могут принимать любые совпадающие значения, но угол наблюдения φ_{max} уже равен $\varphi_{\text{in,max}}^{(1)} \pm \pi/2$. Описанные оптимальные значения параметров задачи кратко приведены в табл. 4.

Таким образом, для всех рассмотренных типов анизотропии глобальный максимум функции $\hat{s}_{\text{norm,max}}^{(2\omega)}$ достигается при параметрах исходных волн, соответствующих (6). Подчеркнем, что возрастание размера частицы во всем рассматриваемом диапазоне ($0.05 \leq k_{\omega}a \leq 20$) приводит к увеличению максимальной генерируемой плотности мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ даже на участках убывания функции $\hat{s}_{\text{norm,max}}^{(2\omega)}$ (которые можно заметить на рис. 1, *a*). Это объясняется наличием вспомогательной величины $S_0(k_{\omega}a)$ при определении $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ в формуле (1), которая пропорциональна $(k_{\omega}a)^4$ (на всех участках уменьшения функции вспомогательной плотности мощности она убывает медленнее, чем $(k_{\omega}a)^{-4}$).

Оптимизация энергетических характеристик при фиксированных ориентациях эллипсов поляризации падающих волн

Рассмотрим влияние фиксации нескольких параметров задачи на эффективность генерации второй гармоники–суммарной частоты и на оптимальные значения параметров. Зададим характеристики частицы и углы между большими полуосями эллипсов поляризации и осью Ox следующим образом:

$$k_{\omega}a = 0.1, \quad \xi = 1.34/1.33, \quad \varphi_{\text{in}}^{(1)} = \pi/2, \quad \varphi_{\text{in}}^{(2)} = 0. \quad (9)$$

При фиксированном радиусе частицы вспомогательная величина $S_0(k_\omega a)$ остается постоянной, ввиду чего исследование пространственной плотности мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ можно свести к анализу вспомогательной плотности мощности $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$. Численные значения плотности мощности могут быть найдены из формулы (1) при подстановке параметров (9).

Произведем численную максимизацию вспомогательной плотности мощности $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ по параметрам $\theta, \varphi, \gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2$ отдельно для четырех типов анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$ и малахитового зеленого. Результаты максимизации вспомогательной плотности мощности $s_{\text{norm}}^{(2\omega)}$, а также направления ее наблюдения, характеризуемые углами $\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}}$, представлены в табл. 5. Из табл. 5 видно, что параметры $\gamma_{\text{max}}, |\eta_{\text{max}}|, \sigma_{1,\text{max}}$ принимают различные значения для каждого из рассмотренных типов анизотропии. Обратим внимание, что для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ оптимальный угол раскрытия $\gamma_{\text{max}} = 2.421$, что значительно выделяет его среди других рассмотренных типов анизотропии, для которых γ_{max} принимает значения вблизи нуля.

Аналогичным образом (для параметров (9)) определим глобальные максимумы вспомогательной полной мощности генерируемого излучения $w_{\text{norm}}^{(2\omega)}$. Оптимизированные значения вспомогательной мощности отдельно для каждого типа анизотропии приведены в табл. 6. Здесь в значениях параметров, соответствующих максимуму, можно заметить, что для типов анизотропии $\chi_{1,3}^{(2)}$ оптимальным является строго встречное падение исходных волн, а для остальных рассмотренных случаев, наоборот, сонаправленное. Выяснилось, что оптимальные параметры $\arg \eta_{\text{max}}$ и $\sigma_{2,\text{max}}$ для всех рассмотренных типов анизотропии оказались равными $\pm\pi/2$ и ± 1 соответственно.

После анализа значений мощностей в табл. 5 и 6 для типов анизотропии $\chi_{1-4}^{(2)}$ становится ясно, что для близких по порядку значений коэффициентов анизотропии (в таблице приведены результаты для типов анизотропии $\chi_i^{(2)}, i = 1, 2, 3, 4$, определенных как $\chi_i^{(2)} = 1, \chi_j^{(2)}|_{j \neq i} = 0$) и зафиксированных параметрах (9) наибольший вклад в генерацию будут вносить слагаемые с коэффициентами $\chi_2^{(2)}$ и $\chi_3^{(2)}$.

Зависимость энергетических характеристик от угла раскрытия, отношения комплексных амплитуд и эллиптичности падающих волн

Исследуем поведение величин $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ и $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ при варьировании переменных γ, η ($|\eta|$ и $\arg \eta$), σ_1 и σ_2 вблизи положения максимума. При этом зафиксируем параметры $k_\omega a, \xi, \varphi_{\text{in}}^{(1)}$ и $\varphi_{\text{in}}^{(2)}$ на значениях (9). Для исследования поведения энергетических характеристик генерируемого излучения построим нормированные

графики зависимостей указанных величин от различных переменных, содержащие максимумы, указанные в табл. 5 и 6. Подчеркнем, что параметры γ, η, σ_1 и σ_2 для каждого типа анизотропии и каждой из величин $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ и $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ различны. При построении графиков зависимостей плотности мощности от различных параметров будем рассчитывать максимальную по направлению θ, φ плотность мощности ($S_{\text{max } \theta \varphi} = \max_{\theta, \varphi} [S_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$), так как варьирование указанных выше переменных ($\gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2$) существенно влияет на пространственное распределение генерируемой плотности мощности, что было показано в части II настоящей работы. При этом углы θ_{max} и φ_{max} , при которых наблюдается максимальная мощность, неодинаковы для различных точек на графиках зависимостей $S_{\text{max } \theta \varphi}$ от переменных $\gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2$.

На рис. 2 представлены трехмерные изображения графиков зависимостей максимальной по направлению θ, φ плотности мощности излучения от угла раскрытия γ и модуля отношения комплексных амплитуд $|\eta|$ (в логарифмическом масштабе), содержащие точку глобального максимума, указанного в табл. 5, для фиксированных параметров (9). Значения параметров задачи в этой точке, при которых достигается максимальное значение плотности мощности генерируемого излучения, указаны в строках 3–9 табл. 5. Для удобства анализа графики нормированы на соответствующие оптимизированные значения плотности мощности $S_0 \cdot \max_{\theta, \varphi, \gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2} [S_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$ для каждого графика в отдельности (значения максимальных вспомогательных плотностей мощности в строке 2 табл. 5). На рис. 3 приведены аналогичные графики, но для полной генерируемой мощности $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$, нормировка произведена на мощности $S_0 r^2 \cdot \max_{\gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2} [w_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$ (строка 2 табл. 6), а параметры точки максимума, которую содержит графики, указаны в строках 3–7 табл. 6.

Срезы трехмерных графиков (рис. 2, 3), проходящие через положение максимума, при $|\eta| = |\eta_{\text{max}}| = \text{const}$ изображены на рис. 4, а и 5, а соответственно. Срезы трехмерных графиков (рис. 2, 3), проходящие через положение максимума, при $\gamma = \gamma_{\text{max}} = \text{const}$ изображены на рис. 4, б и 5, б соответственно.

Из графиков на рис. 2, 4 видно, что для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$ максимальная плотность мощности наблюдается при $\gamma = \gamma_{\text{max}} = 0.021, |\eta| = |\eta_{\text{max}}| = 0.706$. При увеличении угла раскрытия или при отклонении от значения $|\eta| = |\eta_{\text{max}}| = 0.706$ максимальная плотность мощности плавно убывает. График несимметричен относительно максимума (при $\gamma = \text{const}$ убывание быстрее в сторону больших $|\eta|$). График для полной мощности $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ (рис. 3, а) имеет максимум при $\gamma = \gamma_{\text{max}} = \pi, |\eta| = |\eta_{\text{max}}| = 1$. Причем можно отметить область $\gamma \in [0; 0.8]$ на рис. 5, а, где полная генерируемая мощность второй гармоники–суммарной частоты практически не изменяется. Сечения поверхности при

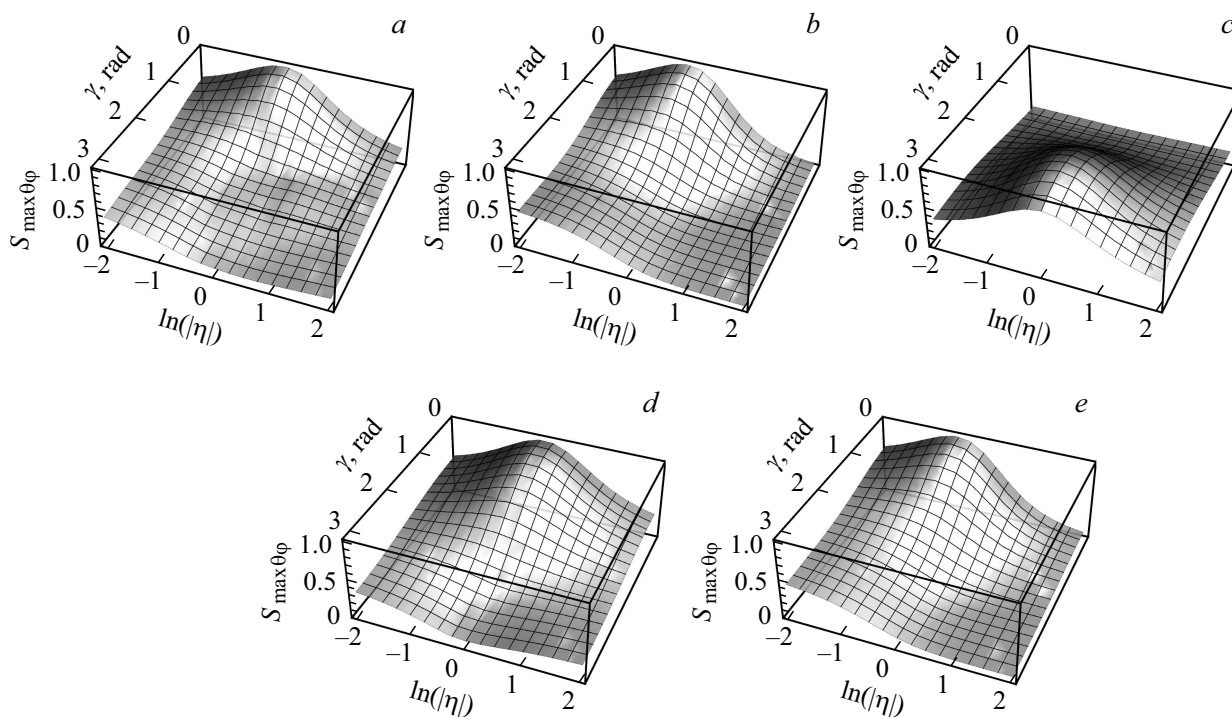


Рис. 2. Зависимость максимальной по направлению θ, φ плотности мощности генерации второй гармоники–суммарной частоты $S_{\max \theta \varphi} = \max_{\theta, \varphi}[S_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$ от угла раскрытия и модуля отношения комплексных амплитуд для анизотропии типов $a - \chi_1^{(2)}$, $b - \chi_2^{(2)}$, $c - \chi_3^{(2)}$, $d - \chi_4^{(2)}$, $e - \text{MG}$.

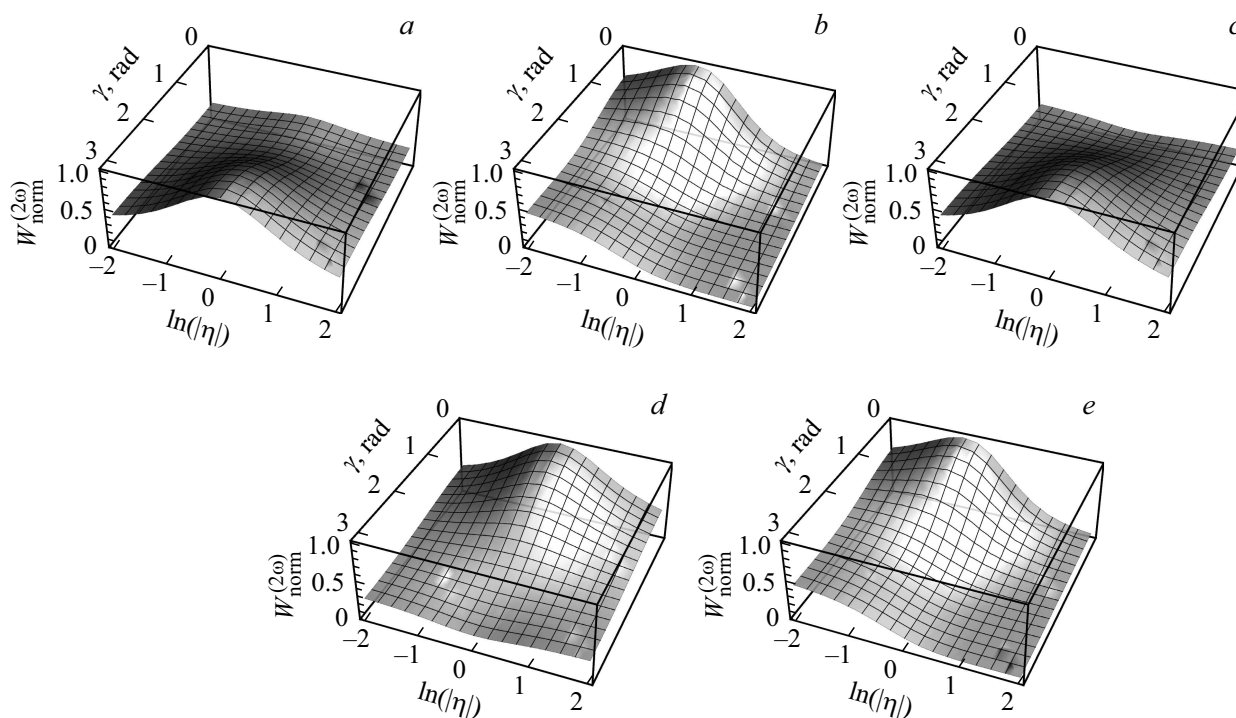


Рис. 3. Зависимость полной мощности генерируемого излучения от угла раскрытия и модуля отношения комплексных амплитуд для анизотропии типов $a - \chi_1^{(2)}$, $b - \chi_2^{(2)}$, $c - \chi_3^{(2)}$, $d - \chi_4^{(2)}$, $e - \text{MG}$.

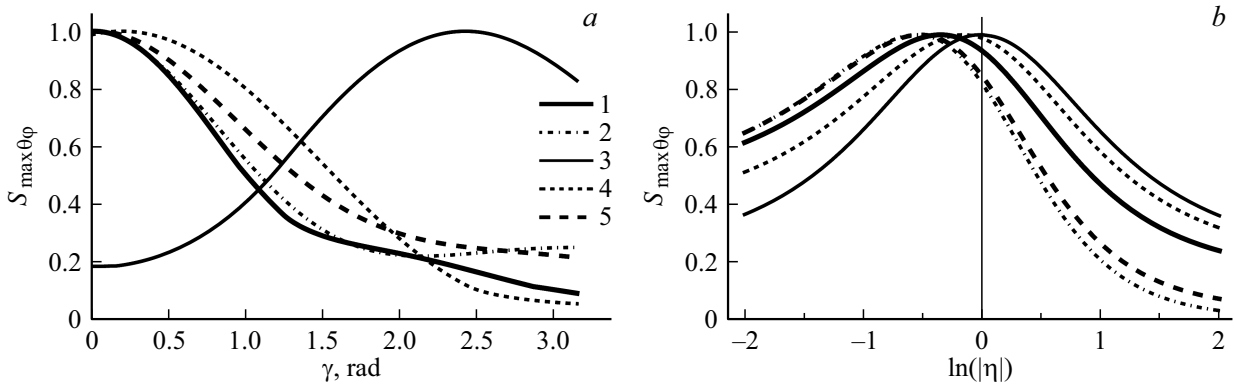


Рис. 4. Зависимости максимальной по направлению θ, φ плотности мощности генерации второй гармоники–суммарной частоты $S_{\max \theta \varphi} = \max_{\theta, \varphi} [S_{\text{норм}}^{(2\omega)}]$: *a* — от угла раскрытия, *b* — от модуля отношения комплексных амплитуд для анизотропии типов 1 — $\chi_1^{(2)}$, 2 — $\chi_2^{(2)}$, 3 — $\chi_3^{(2)}$, 4 — $\chi_4^{(2)}$, 5 — MG.

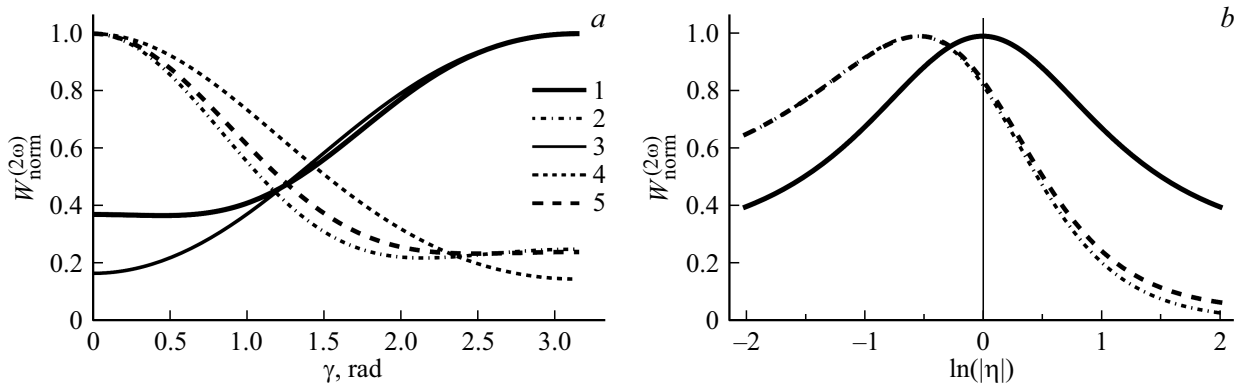


Рис. 5. Зависимости полной генерируемой мощности второй гармоники–суммарной частоты *a* — от угла раскрытия, *b* — от модуля отношения комплексных амплитуд для анизотропии типов 1 — $\chi_1^{(2)}$, 2 — $\chi_2^{(2)}$, 3 — $\chi_3^{(2)}$, 4 — $\chi_4^{(2)}$, 5 — MG.

$\gamma = \text{const}$ (рис. 5, *b*) имеют симметричный вид. Это объясняется свойством зеркального отражения диаграммы направленности при замене $|\eta| \rightarrow 1/|\eta|$ для циркулярно поляризованных встречных волн (свойство замены 5 части III).

Для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ зависимость $W_{\text{норм}}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$ (рис. 3, *b*) при отклонении в любую сторону от положения максимума монотонно убывает, но при $\gamma \in [2; \pi]$ полная генерируемая мощность незначительно возрастает. Нормированный график зависимости $S_{\max \theta \varphi}(\gamma, |\eta|)$ (рис. 2, *b*) имеет аналогичный вид (аналитическое доказательство приведено в Приложении В). Максимумы $S_{\text{норм}}^{(2\omega)}$ и $W_{\text{норм}}^{(2\omega)}$ достигаются при $\gamma = \gamma_{\max} = 0$ и $|\eta| = |\eta_{\max}| = 0.577$, также наблюдается более быстрое убывание в сторону больших $|\eta|$.

В случае анизотропии типа $\chi_3^{(2)}$ график для $S_{\max \theta \varphi}$ (рис. 2, *c*) имеет явный максимум при $\gamma = \gamma_{\max} = 2.421$ и $|\eta| = |\eta_{\max}| = 0.980$. Сечения при $\gamma = \text{const}$ (рис. 4, *b*) близки к симметричным относительно вершины. Для полной мощности (рис. 3, *c*) максимум наблюдается при $\gamma = \gamma_{\max} = \pi$ и $|\eta| = |\eta_{\max}| = 1$. Стоит отметить, что все

сечения графика $W_{\text{норм}}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$ при $|\eta| = \text{const}$ (рис. 5, *a*) имеют неубывающий вид с ростом угла раскрытия γ при всех $0 < \gamma < \pi$. Сечения нормированных поверхностей $W_{\text{норм}}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$ при $\gamma = \gamma_{\max} = \pi$ (рис. 5, *b*) имеют симметричный вид, в точности совпадающий с описанным для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$. Доказательство этого совпадения для малого размера нелинейного слоя приведено в Приложении С.

Для кирального слоя (тип анизотропии $\chi_4^{(2)}$) оптимальное значение максимальной по направлению наблюдения θ, φ плотности мощности достигается при $\gamma = \gamma_{\max} = 0.202$ и $|\eta| = |\eta_{\max}| = 0.856$. При отклонении угла раскрытия γ от оптимального или при отклонении параметра $|\eta|$ от оптимального плотность мощности $S_{\max \theta \varphi}$ плавно убывает (рис. 2, *d*). График функции $S_{\max \theta \varphi}(\gamma, |\eta|)$ несимметричен относительно максимума (при $\gamma = \text{const}$ убывание больше выражено в сторону увеличения $|\eta|$, рис. 4, *b*). Полная генерируемая мощность максимальна при $\gamma = \gamma_{\max} = 0$ и $|\eta| = |\eta_{\max}| = 1$. График на рис. 3, *d* обладает плоскостью симметрии $W_{\text{норм}}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|) = W_{\text{норм}}^{(2\omega)}(\gamma, 1/|\eta|)$, что также видно из сим-

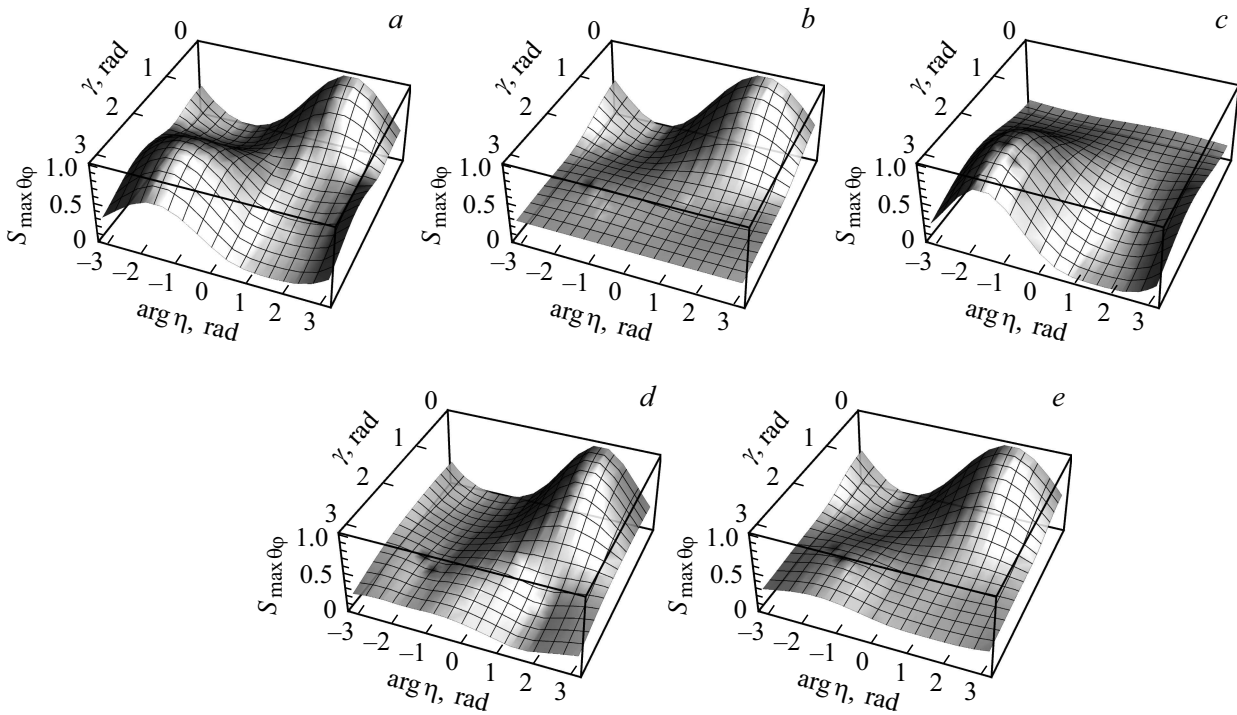


Рис. 6. Зависимость максимальной по направлению θ, φ плотности мощности генерации второй гармоники–суммарной частоты $S_{\max \theta \varphi} = \max_{\theta, \varphi} [S_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$ от угла раскрытия и разности фаз падающих волн в центре частицы для типов анизотропии $a - \chi_1^{(2)}$, $b - \chi_2^{(2)}$, $c - \chi_3^{(2)}$, $d - \chi_4^{(2)}$, $e - \text{MG}$.

метрии рис. 5, b : сечение $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ при $\gamma = \text{const}$ совпадает с таким же нормированным сечением для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$.

На рис. 6 показаны нормированные графики зависимостей максимальной по направлению θ, φ плотности мощности излучения $S_{\max \theta \varphi}$ от угла раскрытия γ и разности фаз падающих волн в центре частицы $\arg \eta$. Для рассмотренных типов анизотропии оптимальное значение параметра $\arg \eta$ оказывается равным $\pm \pi/2$. Сечения при $\gamma = \gamma_{\max} = \text{const}$ имеют немонотонный вид: например, для типов анизотропии $\chi_{1,2,4}^{(2)}$ и малахитового зеленого функция $S_{\max \theta \varphi}$ убывает в диапазонах $\arg \eta \in (-\pi; -\pi/2) \cup (\pi/2; \pi]$ и имеет максимум при $\arg \eta = \pi/2$ и минимум при $\arg \eta = -\pi/2$ (для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ поведение $S_{\max \theta \varphi}$ в сечении $\gamma = \gamma_{\max} = \text{const}$ в точности противоположное).

Отметим схожесть нормированных трехмерных графиков для типов анизотропии $\chi_{2,4}^{(2)}$ и малахитового зеленого (рис. 6, b, d, e соответственно). В случае анизотропии типа $\chi_3^{(2)}$ (рис. 6, c) также наблюдается один максимум при $\gamma = \gamma_{\max} = 2.421$ и $\arg \eta = \arg \eta_{\max} = -\pi/2$. Для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$ (рис. 6, a) наблюдаются два максимума: глобальный, положение которого указано в табл. 5, и локальный при $\gamma = 2.336$ и $\arg \eta = -\pi/2$ ($\theta = 2.246, \varphi = -\pi/2$). Значение $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ для локального максимума равно $1.143 \cdot 10^{-3} S_0$, что на 7.374% меньше

значения оптимальной генерируемой плотности мощности.

Нормированные графики для полной генерируемой мощности $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ от γ и $\arg \eta$ подобны графикам на рис. 6: для типов анизотропии $\chi_{2,4}^{(2)}$ и малахитового зеленого графики схожи с графиками, представленными на рис. 6, b, d, e соответственно. А для типов анизотропии $\chi_{1,3}^{(2)}$ наблюдается подобие с графиком, изображенным на рис. 6, c , но положение глобального максимума по углу раскрытия смещено к значению $\gamma = \gamma_{\max} = \pi$.

На рис. 7 представлены изображения зависимостей $S_{\max \theta \varphi}$ от эллиптичности падающих волн (σ_1 и σ_2), нормированные на значения $S_0 \cdot \max_{\theta, \varphi, \gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2} [S_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$ из табл. 5 для каждой диаграммы в отдельности. На рис. 8 приведены аналогичные графики, но для полной генерируемой мощности $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}$, где для каждого типа анизотропии произведена нормировка на значения $S_0 r^2 \cdot \max_{\gamma, \eta, \sigma_1, \sigma_2} [w_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$ из табл. 6.

Для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$ график $S_{\max \theta \varphi}(\sigma_1, \sigma_2)$ (рис. 7, a) имеет глобальный максимум при $\sigma_{1, \max} = 0.002$ и $\sigma_{2, \max} = -1$ и еще один дополнительный максимум при $\sigma_1 = -1$ и $\sigma_2 = -0.017$ ($\theta = 0.968, \varphi = 0.006$), в данной точке $S_{\text{norm}}^{(2\omega)} = 0.977 \cdot 10^{-3} S_0$, что составляет 79.174% от значения плотности мощности, указанного в табл. 5. При отклонении эллиптичности падающих волн от указанной выше плотность

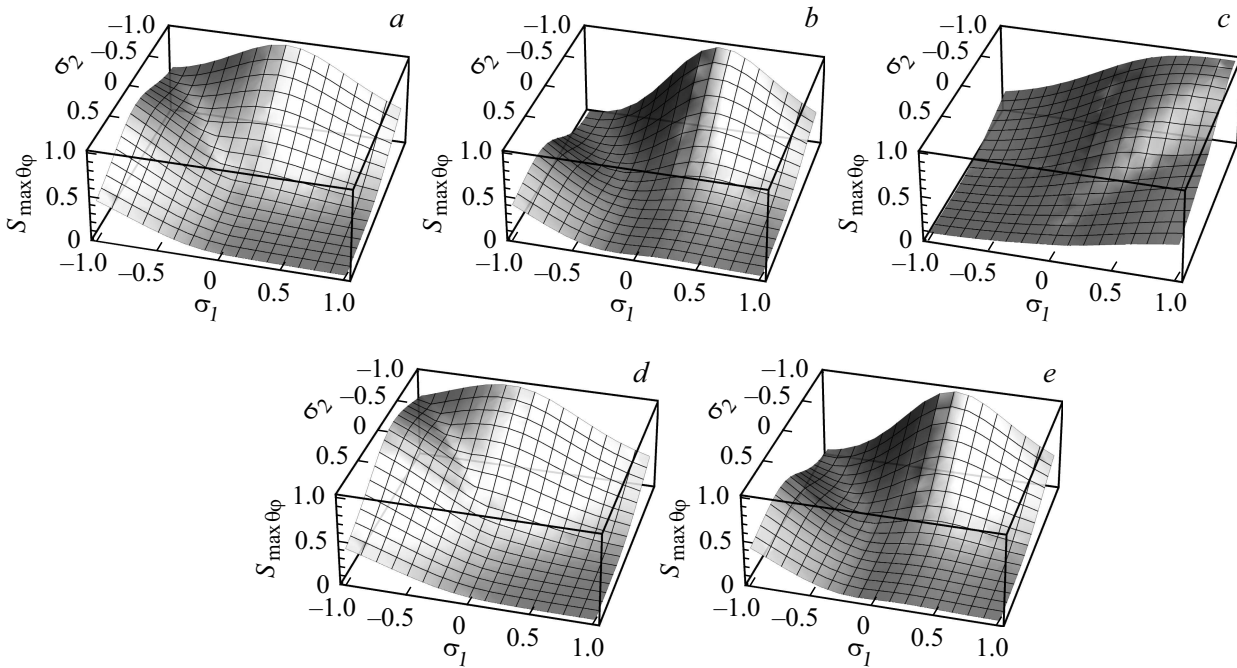


Рис. 7. Зависимость максимальной по направлению θ, φ плотности мощности генерации второй гармоники–суммарной частоты $S_{\max \theta \varphi} = \max_{\theta, \varphi} [S_{\text{norm}}^{(2\omega)}]$ от эллиптичности падающих волн для типов анизотропии $a - \chi_1^{(2)}, b - \chi_2^{(2)}, c - \chi_3^{(2)}, d - \chi_4^{(2)}, e - \text{MG}$.

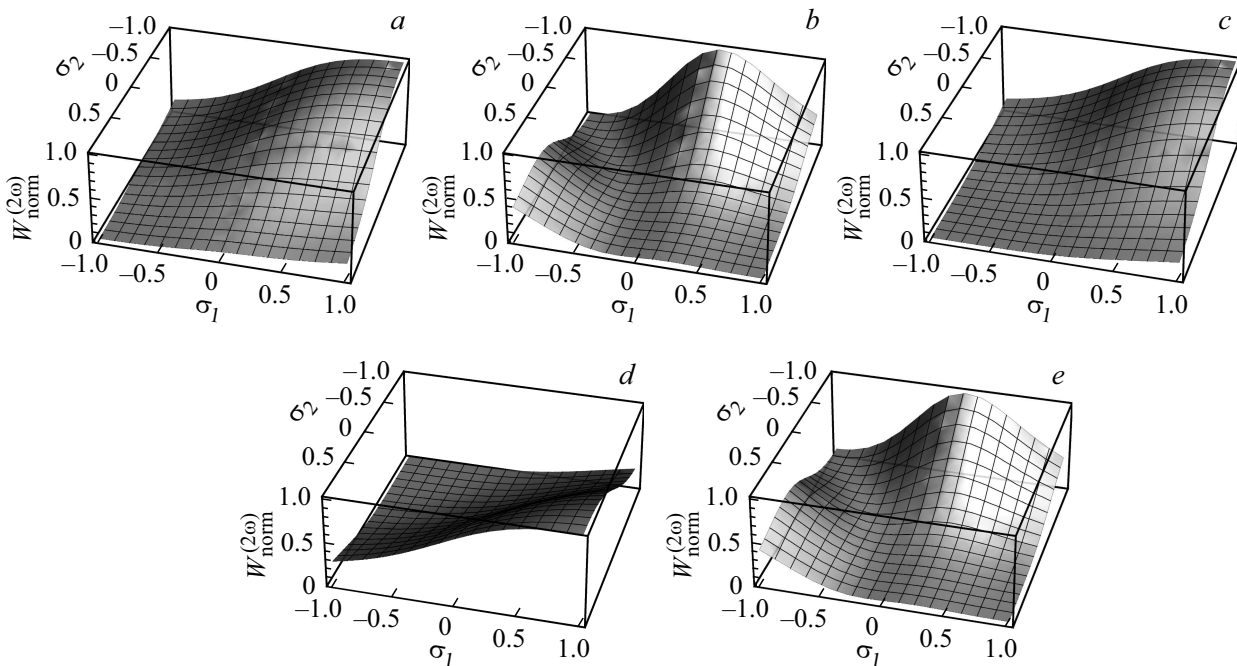


Рис. 8. Зависимость полной генерируемой мощности второй гармоники–суммарной частоты от эллиптичности падающих волн для типов анизотропии $a - \chi_1^{(2)}, b - \chi_2^{(2)}, c - \chi_3^{(2)}, d - \chi_4^{(2)}, e - \text{MG}$.

мощности $S_{\max \theta \varphi}$ плавно убывает. Исключением является область $\sigma_1 \in (-1; 0.002), \sigma_2 \in (-1; -0.017)$, где наблюдается немонотонный переход от глобального максимума к локальному. График для полной мощности $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}(\sigma_1, \sigma_2)$ (рис. 8, *a*) имеет максимум

при $\sigma_{1, \max} = 1$ и $\sigma_{2, \max} = -1$ и плавно убывает во всем диапазоне (σ_1, σ_2) при отклонении параметров σ_1 и σ_2 от оптимальных.

График $S_{\max \theta \varphi}(\sigma_1, \sigma_2)$ для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ (рис. 7, *b*) также имеет два максимума: первый

$S_{\text{norm}}^{(2\omega)} = 8.747 \cdot 10^{-3} S_0$ при $\sigma_{1,\text{max}} = 0.172$ и $\sigma_{2,\text{max}} = -1$ и второй $S_{\text{norm}}^{(2\omega)} = 4.175 \cdot 10^{-3} S_0$ при $\sigma_1 = -1$ и $\sigma_2 = 0.397$ ($\theta = 1.563, \forall \varphi$). Поведение функции максимальной по направлению θ, φ плотности мощности излучения сходно с поведением $S_{\text{max } \theta \varphi}(\sigma_1, \sigma_2)$ для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$ (рис. 7, а): имеется область перехода между двумя максимумами и область убывания функции. График зависимости полной мощности (рис. 8, б) от аналогичных переменных имеет вид, совпадающий с графиком $S_{\text{max } \theta \varphi}(\sigma_1, \sigma_2)$ для этого типа анизотропии с таким же расположением максимумов (аналитическое доказательство приведено в Приложении В).

В случае анизотропии типа $\chi_3^{(2)}$ функция $S_{\text{max } \theta \varphi}(\sigma_1, \sigma_2)$ (график изображен на рис. 7, с) монотонна во всей области изменения параметров с максимумом при $\sigma_{1,\text{max}} = 0.885$ и $\sigma_{2,\text{max}} = -1$. График полной мощности (рис. 8, с) похож на изображение описанного выше графика (рис. 7, с), но для зависимости $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}(\sigma_1, \sigma_2)$ имеется максимум при $\sigma_{1,\text{max}} = 1$ и $\sigma_{2,\text{max}} = -1$.

Графики $S_{\text{max } \theta \varphi}(\sigma_1, \sigma_2)$ и $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}(\sigma_1, \sigma_2)$ для типа анизотропии $\chi_4^{(2)}$ (рис. 7, д и 8, д соответственно) похожи на соответствующие графики для типа анизотропии $\chi_1^{(2)}$. При этом максимумы $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ находятся в точках $\sigma_{1,\text{max}} = -0.221, \sigma_{2,\text{max}} = -1$ и $\sigma_1 = -1, \sigma_2 = 0.249$ ($\theta = 2.095, \varphi = -0.032$, плотность мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)} = 0.121 \cdot 10^{-3} S_0$) соответственно. Максимум полной мощности наблюдается при $\sigma_{1,\text{max}} = 1, \sigma_{2,\text{max}} = 1$.

Для типа анизотропии, соответствующего малахитовому зеленому, графики $S_{\text{max } \theta \varphi}(\sigma_1, \sigma_2)$ (рис. 7, е) и $W_{\text{norm}}^{(2\omega)}(\sigma_1, \sigma_2)$ (рис. 8, е) подобны между собой и схожи с соответствующими графиками для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ (рис. 7, б и 8, б). Положение максимумов на этих графиках также очень близкое, что можно видеть из строк 6, 7 табл. 5, 6.

Заключение

В настоящей работе произведена оптимизация условий генерации излучения второй гармоники–суммарной частоты от тонкого сферического слоя по всем варьируемым параметрам задачи, связанным с источниками, направлениями наблюдения и размером слоя. В результате показано, что максимум интенсивности второй гармоники–суммарной частоты наблюдается при падении двух сонаправленных линейно поляризованных волн с одинаковыми амплитудами, плоскостями поляризации и фазами в центре частицы. Такие оптимальные сочетания параметров получены для типов анизотропии, соответствующих каждой из четырех независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости и малахитовому зеленому. При таких условиях в результате интерференции исходных волн максимальная амплитуда результирующего поля возбуждающего

излучения и обусловленный ей нелинейный отклик, рассчитанный с учетом интерференции волн, генерируемых различными участками сферического слоя. Выявлено, что при больших размерах частицы генерируемая плотность мощности пропорциональна четвертой степени радиуса частицы.

При генерации в тонком слое малахитового зеленого, покрывающего поверхность сферической диэлектрической частицы, доминирующий вклад в генерируемое излучение вносит коэффициент $\chi_2^{(2)}$, что можно видеть из подобного поведения графиков для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ и малахитового зеленого.

Обнаружено, что для типов анизотропии $\chi_{3,4}^{(2)}$ и малахитового зеленого существует несколько диапазонов размеров частицы, для каждого из которых характерны свои индивидуальные условия достижения наиболее эффективной генерации. На границах данных диапазонов оптимальные значения параметров задачи могут изменяться как непрерывно, так и скачкообразно.

Фиксирование отдельных параметров задачи (например, ориентации эллипсов поляризации падающих волн) для сферической частицы малых размеров значительным образом влияет на оптимальные условия генерации как для полной мощности излучения второй гармоники–суммарной частоты, так и для плотности мощности излучения в определенных направлениях. Основываясь на указанных особенностях, можно утверждать, что оптимизацию условий генерации требуется производить индивидуально с учетом ограничений на параметры экспериментальной установки, используемой при исследовании нелинейной генерации.

Найден закон распределения генерируемой плотности мощности для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$. При малом радиусе частицы, если падающие волны сонаправлены, упомянутый закон можно представить в виде $S_r^{(2\omega)} \propto \sin^2 \theta$. Аксиальная симметрия диаграммы направленности излучения второй гармоники для данного типа анизотропии ранее была отмечена в работе [2].

Закономерности, обнаруженные при оптимизации параметров генерации второй гармоники–суммарной частоты, могут служить руководством для выбора оптимальных условий проведения экспериментальных исследований по изучению нелинейной генерации второго порядка в поверхностных слоях диэлектрических частиц сферической формы с использованием нескольких когерентных источников для повышения эффективности генерации.

Приложение А

Для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ напряженность генерируемого поля второй гармоники–суммарной частоты можно

записать в виде (формулы (24), (25), (20) части I)

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = 4\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r} d_0 a^2 \times E_1^2(1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{f}^{(2\omega)}, \quad (10)$$

где $\mathbf{f}^{(2\omega)} = \mathbf{f}^{(11)} + 2\eta\mathbf{f}^{(12)} + \eta^2\mathbf{f}^{(22)}$, а сами векторы $\mathbf{f}^{(\alpha\beta)}$ имеют вид

$$\mathbf{f}^{(\alpha\beta)} = i\chi_2^{(2)} j_1(q^{(\alpha\beta)}a) (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) \mathbf{v}^{(\alpha\beta)}, \quad (11)$$

тогда

$$\mathbf{f}^{(2\omega)} = i\chi_2^{(2)} \left(j_1(q^{(11)}a) (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) \mathbf{v}^{(11)} + 2\eta j_1(q^{(12)}a) (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) \mathbf{v}^{(12)} + \eta^2 j_1(q^{(22)}a) (\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)}) \mathbf{v}^{(22)} \right). \quad (12)$$

Пронормируем напряженность (10) на $1 + |\eta|^2$. С учетом нормировки получим

$$\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)} = \frac{\mathbf{f}^{(2\omega)}}{1 + |\eta|^2},$$

$$S_{\text{norm}}^{(2\omega)} \propto \left| \frac{\mathbf{E}^{(2\omega)}}{1 + |\eta|^2} \right|^2 \propto \left| (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)} \right|^2. \quad (13)$$

Следовательно, увеличение $|\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ в значительной степени будет способствовать росту плотности мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$. Это подтверждается численными расчетами.

Пусть выполняются условия (6). Рассмотрим закономерности изменения величины $\max_{\theta, \varphi} |\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ при варьировании параметров генерации вблизи предполагаемого максимума.

1) Увеличение угла раскрытия γ приводит к тому, что единичные векторы $\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}$ оказываются неколлинеарными. Следовательно, в соответствии с неравенством треугольника величина $\max_{\theta, \varphi} |\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ уменьшается, даже если множители при $\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}$ останутся неизменными. Также в этом случае максимумы сферических функций Бесселя достигаются при разных углах наблюдения θ , из-за чего значение $\max_{\theta, \varphi} |\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ становится еще меньше.

2) Скалярные произведения $(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)})$ и $(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})$ определяются только эллиптичностью падающих волн:

$$(\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) = \frac{1 - \sigma_\alpha^2}{1 + \sigma_\alpha^2} \quad (14)$$

с максимальными значениями указанных произведений при $\sigma_\alpha = 0$. Следовательно, при отклонении величин σ_α от 0 значение $\max_{\theta, \varphi} |\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ также становится меньше.

3) Максимальное значение скалярного произведения $(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)})$ определяется неравенством Коши-Буняковского:

$$|(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)})| \leq \|\mathbf{e}^{(1)}\| \cdot \|\mathbf{e}^{(2)}\|, \quad (15)$$

из которого следует, что максимум достигается при $\mathbf{e}^{(1)} \propto \mathbf{e}^{(2)}$. Это возможно при одновременном выполнении условий $\gamma = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$, $\varphi_{\text{in}}^{(1)} = \varphi_{\text{in}}^{(2)}$, т.е. когда $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)}$. Тогда, используя вывод предыдущего абзаца, получаем, что максимальное значение $(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)})$ в этом случае достигается при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

В соответствии с предыдущими рассуждениями предположим, что $\gamma = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$, $\varphi_{\text{in}}^{(1)} = \varphi_{\text{in}}^{(2)}$. Тогда вектор $\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ можно записать в виде

$$\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)} = i\chi_2^{(2)} j_1(q^{(11)}a) (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) \frac{(1 + \eta)^2}{1 + |\eta|^2} \mathbf{v}^{(11)}. \quad (16)$$

Несложно показать, что экстремумы в зависимости $|\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ от η наблюдаются при выполнении условия $\eta^2 = 1$. Тогда получим, что максимальное значение величина $|\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ принимает при $\eta = 1$ (падающие волны имеют одну фазу), а минимальное — при $\eta = -1$ (падающие волны имеют противоположные фазы).

С учетом описанных выше рассуждений получаем, что при отклонении любого из параметров γ , σ_α , $\varphi_{\text{in}}^{(\alpha)}$, η от значений, соответствующих условиям (6), значение величины $\max_{\theta, \varphi} |\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$ уменьшается. Следовательно, для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ наблюдается максимум величины $\max_{\theta, \varphi} |\mathbf{f}_{\text{norm}}^{(2\omega)}|$, что соответствует наблюдаемому максимуму плотности мощности $S_{\text{norm}}^{(2\omega)}$ при выполнении условий (6).

Приложение В

Для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ в случае сонаправленных волновых векторов $\mathbf{k}^{(1)}$ и $\mathbf{k}^{(2)}$ ($\gamma = 0$) и малого радиуса частицы напряженность генерируемого электромагнитного поля имеет вид

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) \approx 4\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \times \frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r} d_0 a^2 E_1^2(1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) i\chi_2^{(2)} \times \frac{qa}{3} \mathbf{v}((\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) + 2\eta(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) + \eta^2(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})). \quad (17)$$

Запишем радиальную компоненту вектора Умова-Пойнтинга в дальней зоне с использованием определения $\mathbf{v} = \mathbf{q}/q$:

$$S_r^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \frac{c}{8\pi} \frac{n_{2\omega}}{\mu_{2\omega}} |\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x})|^2 \approx \frac{S_0}{9} (a\chi_2^{(2)})^2 \times \left| (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{q}((\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) + 2\eta(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) + \eta^2(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})) \right|^2. \quad (18)$$

С учетом явного вида вектора \mathbf{q} , приведенного в формуле (4) части II, при $\gamma = 0$ получаем, что

$(1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{q} = -k_\omega \sin \theta \mathbf{e}_\theta$. Далее перепишем (18) следующим образом:

$$S_r^{(2\omega)}(r, \theta, \varphi) \approx \frac{4S_0}{9}(k_\omega a \chi_2^{(2)} \sin \theta)^2 \left| ((\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) + 2\eta(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) + \eta^2(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})) \right|^2. \quad (19)$$

Анализируя выражение (19), можем видеть, что выражение под модулем не зависит от угла наблюдения, следовательно, $S_r^{(2\omega)} \propto \sin^2 \theta$, и плотность мощности не зависит от угла φ , а ее максимальное значение $\max_{\theta, \varphi} [S_r^{(2\omega)}]$ наблюдается при $\theta_{\max} = \pi/2$. Поэтому в табл. 5 для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ при $\gamma_{\max} = 0$ приведены значения для оптимального угла наблюдения φ в виде $\forall \varphi_{\max}$, а значение θ_{\max} незначительно отличается от приведенного выше. Еще раз отметим, что это справедливо для параметров $qa \leq 0.696$ (ограничение на аргумент функции Бесселя), что эквивалентно $k_\omega a \leq 0.174$. Действительно, численный анализ показал, что в этих пределах различия между приближенным выражением для плотности мощности (19) и точным значением (формула (22) части I с вектором $\mathbf{E}^{(2\omega)}$ в форме (15) части I) не превышают 5%, что и было изначально заложено в качестве максимально допустимого относительного отклонения приближения функции Бесселя от ее точного значения.

Найдем также полную генерируемую мощность

$$\begin{aligned} W^{(2\omega)} &= \int_{4\pi} S_r^{(2\omega)} r^2 d\Omega = \frac{4S_0 r^2}{9} (k_\omega a \chi_2^{(2)})^2 \\ &\times \left| ((\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) + 2\eta(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) + \eta^2(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})) \right|^2 \int_{4\pi} \sin^2 \theta d\Omega \\ &= \frac{4S_0 r^2}{9} (k_\omega a \chi_2^{(2)})^2 \left| ((\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) + 2\eta(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) + \eta^2(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})) \right|^2 \frac{8}{3} \pi. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что

$$W^{(2\omega)} / \max_{\theta, \varphi} [S_r^{(2\omega)}] = \frac{8}{3} \pi r^2, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \max_{\theta, \varphi} [S_r^{(2\omega)}] &= \frac{4S_0}{9} (k_\omega a \chi_2^{(2)})^2 \\ &\times \left| ((\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}) + 2\eta(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) + \eta^2(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})) \right|^2. \end{aligned}$$

Это соотношение также приближенно выполняется для полной мощности и плотности мощности, которые могут быть найдены через вспомогательные величины из табл. 6 и 5 соответственно. Поэтому графики функций полной генерируемой мощности и максимальной

по направлению θ, φ плотности мощности для типа анизотропии $\chi_2^{(2)}$ практически совпадают.

Аналогичные рассуждения также можно провести и для нормированных функций $S_{\text{норм}}^{(2\omega)}$ и $W_{\text{норм}}^{(2\omega)}$.

Приложение С

В случае анизотропии типа $\chi_1^{(2)}$ при малом радиусе частицы векторные функции $\mathbf{f}^{(\alpha\beta)}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(\alpha\beta)} &= i\chi_1^{(2)} \left(-j_3(q^{(\alpha\beta)} a) \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) \right. \\ &+ \frac{1}{5} (j_1(q^{(\alpha\beta)} a) + j_3(q^{(\alpha\beta)} a)) (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) \\ &+ \mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)})) \left. \right) \\ &\approx i\chi_1^{(2)} \left(-\frac{(q^{(\alpha\beta)} a)^3}{105} \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) \right. \\ &+ \frac{1}{5} \left(\frac{q^{(\alpha\beta)} a}{3} + \frac{(q^{(\alpha\beta)} a)^3}{105} \right) \\ &\times (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + \mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)})) \left. \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Пренебрегая слагаемыми выше первого порядка, которые для частицы размером $k_\omega a = 0.1$ дают вклад меньше 2%, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(\alpha\beta)} &\approx \frac{i}{15} \chi_1^{(2)} q^{(\alpha\beta)} a (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + \mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) \\ &+ \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)})). \end{aligned} \quad (23)$$

Используя явный вид векторов $\mathbf{e}^{(\alpha)}$, представленный формулой (2) части II, для встречного падения ($\gamma = \pi$) циркулярно и противоположно поляризованных волн ($\sigma_1 = \pm 1, \sigma_2 = -\sigma_1$) можно показать, что $(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) = 0$. В случае векторов $\mathbf{f}^{(11)}$ и $\mathbf{f}^{(22)}$ скалярные произведения $(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)})$, $(\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)})$ также обращаются в ноль ввиду циркулярной поляризации волн. Таким образом, векторы $\mathbf{f}^{(\alpha\beta)}$ для анизотропии типа $\chi_1^{(2)}$ принимают вид

$$\mathbf{f}^{(\alpha\beta)} \approx \frac{i}{15} \chi_1^{(2)} q^{(\alpha\beta)} a (\mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)})). \quad (24)$$

Для сравнения приведем вид аналогичных векторов для типа анизотропии $\chi_3^{(2)}$ при малом радиусе нелинейного слоя:

$$\mathbf{f}^{(\alpha\beta)} \approx \frac{i}{3} \chi_3^{(2)} q^{(\alpha\beta)} a (\mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)})). \quad (25)$$

Как видим, данные выражения совпадают с точностью до числового множителя. Следовательно, поведение функций плотности генерируемой мощности и

полной мощности будет аналогичным при одинаковых параметрах задачи для анизотропии типов $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_3^{(2)}$.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф20М–011).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] *Jen S.-H., Dai H.-L., Gonella G.* // J. Phys. Chem. C. 2010. V. 114. N 10. P. 4302. doi 10.1021/jp910144c
- [2] *Капшай В.Н., Шамына А.А.* // Опт. и спектр. 2017. Т. 123. № 3. С. 416. doi 10.7868/S003040341709015X; *Капшай В.Н., Шамына А.А.* // Opt. Spectrosc. 2017. V. 123. N 3. P. 440. doi 10.1134/S0030400X17090144
- [3] *Viarbitskaya S., Kapshai V., P. van der Meulen, Hansson T.* // Phys. Rev. A. 2010. V. 81. N 5. P. 053850. doi 10.1103/PhysRevA.81.053850
- [4] *Jen S.-H., Gonella G., Dai H.-L.* // J. Phys. Chem. C. 2009. V. 113. N 16. P. 4758. doi 10.1021/jp9009959
- [5] *Wunderlich S., Schuerer B., Sauerbeck C., Peukert W., Peschel U.* // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. N 23. P. 235403. doi 10.1103/PhysRevB.84.235403