Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 4

УДК 519.281 *МАТЕМАТИКА*

А. И. ШАЛЫТ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРА СДВИГА В КЛАССЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПРОЦЕДУР

(Представлено академиком Ю. В. Линником 23 I 1970)

Возможности, предоставляемые последовательными процедурами в теории оценивания, состоят, во-первых, в увеличении запаса параметрических функций, допускающих несмещенные оценки (см., например, [4, 1]), во-вторых, для тех функций, для которых существуют несмещенные оценки по выборке фиксированного объема, в некоторых случаях можно указать лучшие последовательные оценки. Настоящая заметка посвящена как раз последнему аспекту теории последовательного оценивания.

В п. 1 дается определение оптимальности последовательной оценки в некотором классе; по существу оно аналогично вальдовскому определению оптимальности последовательного критерия различения двух гипотез.

Оптимальные последовательные оценки внутри класса инвариантных процедур для схемы с параметром сдвига указаны в п. 2. Интересной, на наш взгляд, является теорема 4, которая устанавливает некоторое интегральное соотношение между риском и функцией среднего числа наблюдений для оптимальных оценок.

1. Пусть на (R^1, B) задано семейство вероятностных распределений $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$. Последовательная оценка есть решающая функция, которая вполне определяется правилом остановки (пр. ост.) и окончательным решением.

Обозначим (R^∞, B^∞) измеримое пространство всех числовых последовательностей $\omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и рассмотрим расширяющуюся последовательность σ-алгебр $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\infty \subset B^\infty$, где $F_n \subset B^n$. Пр. ост., согласованным с последовательностью $F = \{F_n\}$ (обозначим все такие правила $\mathfrak{M}_F$), называется случайная величина (с.в.) $\tau = \tau(\omega)$ со значениями из множества целых положительных чисел такая, что событие $\{\tau = n\} \in F_n$.

Под окончательным решением d будем понимать счетный набор функций $d = \{\bar\theta_1(x_1), \bar\theta_2(x_1, x_2), \ldots, \bar\theta_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots\}$; смысл его в том, что, остановившись в момент $\tau = n$, мы используем $\bar\theta_n$ в качестве оценки параметра θ.

Определение 1. Последовательной оценкой назовем пару $[\tau, d]$.

Риск последовательной оценки $[\tau, d]$, отвечающий функции потерь $r(\bar\theta, \theta)$, определяется следующим образом:

$$R_\theta[\tau, d] = E_\theta r(\bar\theta_{\tau(\omega)}(\omega), \theta).$$

Определение 2. Последовательная оценка $[\tau_0, d_0]$ называется *оптимальной в классе* $(\mathfrak{M}_F, D)$, где D — некоторое множество окончательных решений, если: 1) $\tau_0 \in \mathfrak{M}_F$, $d_0 \in D$; 2) из условий $\tau \in \mathfrak{M}_F$ и $E_\theta\tau \leqslant E_\theta\tau_0$ для всех $\theta \in \Theta$ следует, что для каждого $d \in D$ выполнено $R_\theta[\tau_0, d_0] \leqslant R_\theta[\tau, d]$ также для всех $\theta \in \Theta$.

2. В схеме прямых измерений наблюдения x_i имеют вид $x_i = \theta + \varepsilon_i$, где θ — (неизвестное) значение измеряемой величины, ε_i — погрешности наблюдений, которые обычно предполагаются независимыми одинаково распределенными с.в. Пусть $P(\varepsilon_i < x) = F(x)$, тогда $P(x_i < x) = P(\theta +$

$+\varepsilon_i < x) = F(x-\theta)$, и поэтому параметр θ называют параметром сдвига. Укажем оптимальную последовательную оценку $\theta \in R^1$ внутри некоторого класса $(\mathfrak{M}_F, D)$ и $r(\bar\theta, \theta) = (\bar\theta - \theta)^2$.

При последовательном оценивании параметра сдвига естественно пользоваться инвариантными пр. ост., т. е. полагать $F_1 = \phi$ и при $n \geqslant 2$ $F_n = \sigma(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$, где через $\sigma(\xi)$ обозначена σ-алгебра, порожденная вектором ξ. Отметим, что при использовании инвариантных пр. ост. $\tau \in \mathfrak{M}_F$ мы никогда не останавливаемся на первом шаге (с вероятностью $\tau > 1$), и поэтому счетный набор функций, определяющий окончательное решение, может задаваться без первой компоненты $\bar\theta_1$. В качестве D возьмем множество тех d, которые образованы функциями $\bar\theta_n$, удовлетворяющими для любого $c \in R^1$ условию

$$\bar\theta_n(x_1 + c, \ldots, x_n + c) = c + \bar\theta_n(x_1, \ldots, x_n).$$

При таком выборе класса $(\mathfrak{M}_F, D)$ каждая последовательная оценка $[\tau, d]$, принадлежащая этому классу, лишь аддитивной постоянной отличается от несмещенной оценки параметра θ.

Положим $t_n = t_n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - E_0\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \,\Big|\, F_n\right)$,

$n \geqslant 2$, и введем окончательное решение $t = \{t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots\}$.

Теорема 1. *Пусть на (R^1, B) задано семейство распределений $F(x-\theta)$, $\theta \in R^1$; тогда всякая последовательная оценка $[\tau_\varepsilon, t]$, где τ_ε удовлетворяет условию*

$$E_0(t^2_{\tau_\varepsilon} + \varepsilon\tau_\varepsilon) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_F} E_0(t^2_\tau + \varepsilon\tau), \quad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

оптимальная в классе $(\mathfrak{M}_F, D)$.

Из результатов ([2]) следует, что такое пр. ост. τ_ε существует и $P_0(\tau_\varepsilon < \infty) = 1$. Как следствие этой общей теоремы получаем две других, формулировки которых более удобны.

Теорема 2. *Пусть распределение $F(x)$ таково, что при каждом $n \geqslant 2$ $E_0(t_n^2 | F_n) = \text{const} = D_n$. Если $\tau_0 \in \mathfrak{M}_F$ и $P_0(\tau_0 = N) = 1 - \alpha$, $P_0(\tau_0 = N + 1) = \alpha$, где N целое и $0 \leqslant \alpha < 1$, то последовательная оценка $[\tau_0, t]$ оптимальна в классе $(\mathfrak{M}_F, D)$, при этом $E_0\tau_0 = N + \alpha$ и дисперсия оценки $D_0 t_{\tau_0} = (1-\alpha)D_N + dD_{N+1}$.*

Примеры: нормальное распределение

$$N(\theta, \sigma); \; t_n = (x_1 + \ldots + x_n)/n = \bar{x}; \quad E_0(\bar{x}_2 | F_n) = \sigma^2/n;$$

показательное распределение с плотностью $p(x) = e^x$ при $x \geqslant 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$; $t_n = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - 1/n$; $E_0(t_n^2 | F_n) = 1/n^2$.

Теорема 3. *Пусть $d_n = d_n(x_1, \ldots, x_n) = E_0(t_n^2 | F_n)$, а функция распределения $F(x)$ удовлетворяет следующему условию: для всякого $n \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$ из неравенства $E_0(d_{n+2} | F_{n+1}) - d_{n+1} < -\varepsilon$ следует $E_0(d_{n+1} | F_n) - d_n < -\varepsilon$. Тогда последовательная оценка $[\tau_\varepsilon, t]$, где $\tau_\varepsilon = \{k : E_0(d_{k+1} | F_k) - d_k \geqslant -\varepsilon\}$, оптимальна в классе $(\mathfrak{M}_F, D)$.*

Пример: равномерное распределение с плотностью $p(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$, $p(x) = 0$ при $x > 1/2$.

Обозначим $x_{(n)} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ и $x^{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$, тогда $t_n = (x_{(n)} + x^{(n)})/2$; $d_n = {}^1/_{12}(1 + x_{(n)} - x^{(n)})^2$; $E_0(d_{n+1} | F_n) = {}^1/_{24}(1 + x_{(n)} - x^{(n)})^2 (1 + x^{(n)} - x_{(n)})$ и $\tau_\varepsilon = \min\{n : x^{(n)} - x_{(n)} \geqslant 1 - \sqrt[3]{24\varepsilon}\}$. Уже указывалось ([3]), что эта последовательная оценка лучше оценки, построенной по выборке фиксированного объема, однако ничего не было известно об ее оптимальном характере.

Приводимая ниже теорема позволяет установить нижнюю границу для дисперсии произвольной последовательной оценки $[\tau, d]$ в классе $(\mathfrak{M}_F, D)$.

Теорема 4. *Предположим, что при каждом $\varepsilon > 0$ существует единственное пр. ост. τ_ε, которое реализует инфимум в (1). Тогда среднее число наблюдений $q(\varepsilon) = E_0\tau_\varepsilon$ оптимальной последовательной оценки $[\tau_\varepsilon, t]$ и* *величина ее дисперсии $D(\varepsilon) = E_\theta (t_{\tau_\varepsilon} - \theta)^2$ связаны между собой соотношением*

$$D(\varepsilon) = -\int_0^\varepsilon x\, dq(x) = \int_{E\theta\tau_\varepsilon}^\infty q^{-1}(y)\, dy,$$

где первый интеграл понимается как интеграл Стильтьеса, а второй — Римана.

Следствие. *Для любой последовательной оценки $[\tau, d]$, где $\tau \in \mathfrak{M}_r$ и $d = \{\bar\theta_2, \bar\theta_3, \ldots, \bar\theta_n, \ldots\} \in D$, выполнено неравенство*

$$E_\theta (\tilde\theta_\tau - \theta)^2 \geqslant \int_{E_\theta \tau}^\infty q^{-1}(y)\, dy. \quad (2)$$

Пример: равномерное распределение, $q(\varepsilon) = 1 / \sqrt[3]{3\varepsilon}$ и из неравенства (2) следует, что для всякой последовательной оценки $[\tau, d]$

$$E_\theta (\bar\theta_\tau - \theta)^2 \geqslant {}^1/_6 (E_\theta \tau)^2.$$

Автор выражает благодарность А. М. Кагану за помощь в процессе работы.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
5 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. А. Зайдман, Ю. В. Линник, И. В. Романовский, ДАН, 185, № 6 (1969). [2] И. С. Чжоу, Г. Роббинс, Сборн. пер. Математика, 9, 3 (1965). [3] А. И. Шалыт, ДАН, 189, № 1 (1969). [4] M. H. De Groot, Ann. Math. Statist., 30, 80 (1959).