Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 1

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

К. А. КАСЫМОВ

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДИНАКОВОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 22 XII 1969)

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\varepsilon(\partial u / \partial t + \partial u / \partial x) = F(t, x, u, v),\\ \partial v / \partial t + \partial v / \partial x = G(t, x, u, v)\end{gathered} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\xi(\varepsilon) u(t, x)|_{t=0} = u_0^0(x), \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0^0(x), \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\xi(\varepsilon)$ — некоторая функция от ε, которая будет определена ниже. Предположим, что правые части F и G системы (1) имеют представления:

$$\begin{gathered}F(t, x, u, v) = u^n \Big[f(t, x, v) + \sum_i{}' f_i(t, x, v) u^{-i}\Big],\\ G(t, x, u, v) = u^m \Big[g(t, x, v) + \sum_i{}' g_i(t, x, v) u^{-i}\Big],\end{gathered} \tag{3}$$

где n и m — некоторые вещественные числа, удовлетворяющие условиям: а) $m = n$, $n \geqslant 1$; б) $n - 1 < m < n$, $n \geqslant 1$; в) $m = n - 1$, $n > 1$ и в полосе $Q(0 \leqslant t \leqslant T < \infty, -\infty < x < +\infty)$ для всех значений v

$$f(t, x, v) < 0, \quad g(t, x, v) > 0. \tag{4}$$

Тогда решение задачи (1), (2) при соответствующем выборе функции $\xi(\varepsilon)$ будет при $\varepsilon \to 0$ стремиться к решению вырожденной системы

$$\begin{gathered}0 = F(t, x, u, v),\\ \partial v / \partial t + \partial v / \partial x = G(t, x, u, v),\end{gathered} \tag{5}$$

но, однако, это решение не будет удовлетворять начальному условию $v(t, x)|_{t=0} = v_0{}^0(x)$, а будет удовлетворять другому начальному условию:

$$v(t, x)|_{t=0} \quad v_0^0(x) + \Delta(x), \tag{6}$$

где $\Delta(x)$ назовем начальным скачком функции $v(t, x)$. Существование начального скачка функции $v(t, x)$ зависит от вида функции $\xi(\varepsilon)$ (вид $\xi(\varepsilon)$ в свою очередь существенно зависит от характера нелинейности правой части системы (1)), а именно

$$\xi(\varepsilon) = \begin{cases}\varepsilon, & m = n,\ n \geqslant 1;\\ \varepsilon^{1/(m+1-n)}, & n - 1 < m < n, n \geqslant 1;\\ e^{1/\varepsilon}, & m = n - 1, n > 1.\end{cases} \tag{7}$$

В настоящей заметке исследуем случай б) при $n > 1$, а остальные случаи исследуются аналогично. Начальный скачок $\Delta(x)$, в силу (4), определяется однозначно из уравнения

$$(u_0^0(x))^{m+1-n} \parallel -(m+1-n)$$

Для построения асимптотики решения задачи (1), (2) полосу Q разобьем на три полосы ([1, 2]):

$$Q_1(0 \leqslant t \leqslant t_1{}^0, -\infty < x < +\infty), \quad t_1^0 = O(\varepsilon^{[m-\sigma(n-1)]/(m+1-n)}$$
$$Q_2(t_1^0 \leqslant t \leqslant t_2^0, \ -\infty < x < +\infty), \quad t_2^0 = O(\varepsilon);$$
$$Q_3(t_2^0 \leqslant t \leqslant T, \ -\infty < x < +\infty), \ 0 < \sigma < 1.$$

§ 2. Построение асимптотики в первой полосе. Сделаем замену

$$\tau = t / \varepsilon^\alpha, \ \varepsilon^\beta u = z, \ \alpha = [m - \sigma(n-1)] / (m+1-n),$$
$$\beta = (1-\sigma) / (m+1-n).$$

Тогда первая полоса Q_1 преобразуется в полосу $Q_1{}^0(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1{}^0, -\infty < x < +\infty)$, где $\tau_1{}^0 = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, а задача (1), (2) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial z}{\partial \tau} + \varepsilon^\alpha \frac{\partial z}{\partial x} = z^n \Big[f(\varepsilon^\alpha \tau, x, v) + \sum_i{}' \varepsilon^{i\beta} f_i(\varepsilon^\alpha \tau, x, v) z^{-i} \Big], \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon^\alpha \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon^\sigma z^m \Big[g(\varepsilon^\alpha \tau, x, v) + \sum_i{}' \varepsilon^{i\beta} g_i(\varepsilon^\alpha \tau, x, v) z^{-i} \Big],\end{gathered} \tag{9}$$

$$\varepsilon^{\sigma/(m+1-n)} z(\tau, x, \varepsilon)|_{\tau=0} = u_0^0(x), \quad v(\tau, x, \varepsilon)|_{\tau=0} = v_0^0(x). \tag{10}$$

Приближенное решение задачи (9) и (10) ищем в виде

$$\begin{gathered}z(\tau, x, \varepsilon) = z_0(\tau, x, \varepsilon) + \sum_{s,p}{}' \varepsilon^{s\alpha + p\beta} z_{sp}(\tau, x, \varepsilon), \\ v(\tau, x, \varepsilon) = v_0(\tau, x, \varepsilon) + \sum_{s,p}{}' \varepsilon^{s\alpha + p\beta} v_{sp}(\tau, x, \varepsilon).\end{gathered} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), в первом приближении, получим

$$\begin{gathered}\partial z_0/\partial \tau = f(0, x, v_0) z_0^n, \quad \varepsilon^{\sigma/(m+1-n)} z_0(\tau, x, \varepsilon)|_{\tau=0} = u_0^0(x), \\ \partial v_0/\partial \tau = \varepsilon^\sigma g(0, x, v_0) z_0^m, \quad v_0(\tau, x, \varepsilon)|_{\tau=0} = v_0^0(x).\end{gathered} \tag{12}$$

Решая эту систему и используя формулу (8) для начального скачка, для $z_0(\tau, x, \varepsilon)$ и $v_0(\tau, x, \varepsilon)$ получим оценки

$$\begin{gathered}\bar{\Delta}(x) - v_0(\tau, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^\sigma)(\tau + \varepsilon^{\sigma(n-1)/(m+1-n)})^{-(m+1-n)/(n-1)}, \\ z_0(\tau, x, \varepsilon) = O(1)(\tau + \varepsilon^{\sigma(n-1)/(m+1-n)})^{-1/(n-1)},\end{gathered} \tag{13}$$

где $\bar{\Delta}(x) \equiv v_0{}^0(x) + \Delta(x)$. Отсюда при $\tau = \tau_1{}^0$ непосредственно можно убедиться, что

$$z_0(\tau_1^0, x, \varepsilon) = O(1), \quad \bar{\Delta}(x) - v_0(\tau_1^0, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^\sigma). \tag{14}$$

Для $z_{sp}(\tau, x, \varepsilon)$, $v_{sp}(\tau, x, \varepsilon)$ имеем задачи:

$$\begin{gathered}\partial z_{sp}/\partial \tau = n z_0^{n-1} f(0, x, v_0) z_{sp} + z_0^n f_v'(0, x, v_0) v_{sp} + \Phi_{sp}, \\ \partial v_{sp}/\partial \tau = \varepsilon^\sigma [m z_0^{m-1} g(0, x, v_0) z_{sp} + z_0^m g_v'(0, x, v_0) v_{sp}] + \Psi_{sp}, \\ z_{sp}(\tau, x, \varepsilon)|_{\tau=0} = 0, \quad v_{sp}(\tau, x, \varepsilon)|_{\tau=0} = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Имеют место оценки

$$z_{sp}(\tau, x, \varepsilon) = O(z_0(\tau, x, \varepsilon)) \frac{1}{(z_0(\tau, x, \varepsilon))^{s(n-1)+p}},$$
$$v_{sp}(\tau, x, \varepsilon) = O(1) \frac{1}{(z_0(\tau, x, \varepsilon))^{s(n-1)+p}}. \tag{16}$$

При соответствующих условиях относительно F, G, $u_0^0(x)$ и $v_0^0(x)$ существование и единственность решения задачи (1), (2) следует из работы ([3]).

Теорема 1. *Всякое решение u, v задачи (1), (2) в Q_1 допускает асимптотическое разложение*

$$u = \varepsilon^{-(1-\sigma)/(m+1-n)}\left[z_0(\tau, x, \varepsilon) + \sum_{s+p=1}^{N} \varepsilon^{s\alpha+p\beta} z_{sp}(\tau, x, \varepsilon)\right] + R_N,$$
$$v = v_0(\tau, x, \varepsilon) + \sum_{s+p=1}^{N} \varepsilon^{s\alpha+p\beta} v_{sp}(\tau, x, \varepsilon) + S_N, \tag{17}$$

а для R_N и S_N в замкнутой области Ω_1, ограниченной прямыми $t = 0$, $t = t_1^0$ и характеристиками системы (1), имеют место равномерные по t x оценки

$$R_N = O\Big(\sum_{s+p=N+1} \varepsilon^{(sm+p-1)/(m+1-n)}\Big), \quad S_N = O\Big(\sum_{s+p=N+1} \varepsilon^{(sm+p)/(m+1-n)}\Big). \tag{18}$$

§ 3. Построение асимптотики во второй полосе. В полосе Q_2 систему (1) решаем при начальных условиях

$$\varepsilon^{(1-\sigma)/(m+1-n)} u(t, x, \varepsilon)\big|_{t=t_1^0} = z_1^0(x, \varepsilon), \quad v(t, x, \varepsilon)\big|_{t=t_1^0} = v_1^0(x, \varepsilon), \tag{19}$$

где $z_1^0(x, \varepsilon)$ и $v_1^0(x, \varepsilon)$ — точные значения решения в $t = t_1^0$, ограниченные при $\varepsilon \to 0$. Сделаем замену $t = t_1^0 + \varepsilon\tau$, тогда вторая полоса Q_2 перейдет в полосу Q_2^0 $(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_2^0,\ -\infty < x < +\infty)$, где $\tau_2^0 = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, и задача (1), (19) примет вид:

$$\partial u/\partial\tau + \varepsilon\, \partial u/\partial x = F(t_1^0 + \varepsilon\tau, x, u, v),$$
$$\partial u/\partial\tau + \varepsilon\, \partial v/\partial x = \varepsilon G(t_1^0 + \varepsilon\tau, x, u, v), \tag{20}$$
$$\varepsilon^{(1-\sigma)/(m+1-n)} u(\tau, x, \varepsilon)\big|_{\tau=0} = z_1^0(x, \varepsilon), \quad v(\tau, x, \varepsilon)\big|_{\tau=0} = v_1^0(x, \varepsilon).$$

Приближенное решение задачи (20) ищем в виде

$$u(\tau, x, \varepsilon) = u_0(\tau, x, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\tau, x, \varepsilon) + \ldots,$$
$$v(\tau, x, \varepsilon) = v_0(\tau, x, \varepsilon) + \varepsilon v_1(\tau, x, \varepsilon) + \ldots \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), в первом приближении получим уравнение для $u_0(\tau, x, \varepsilon)$

$$\partial u_0/\partial\tau = F(t_1^0, x, u_0, v_1^0(x, \varepsilon)), \quad \varepsilon^{(1-\sigma)/(m+1-n)} u_0\big|_{\tau=0} = z_1^0(x, \varepsilon). \tag{22}$$

Предполагая теперь, что $F = O(u_0^n)$, из (22) получим

$$u_0(\tau, x, \varepsilon) = O\left[\left(\tau + \varepsilon^{(n-1)(1-\sigma)/(m+1-n)}\right)^{-1/(n-1)}\right]. \tag{23}$$

Отсюда заметим, что при $\tau = \tau_2^0$ функция $u_0(\tau_2^0, x, \varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Подставляя (21) в (20) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему уравнений для определения коэффициентов

$u_k(\tau, x, \varepsilon)$, $v_k(\tau, x, \varepsilon)$ разложений (21):

$$\partial u_k/\partial\tau = F'_u(t_1^0, x, u_0, v_0)\, u_k + F'_v(t_1^0, x, u_0, v_0)\, v_k + \Phi_k,$$
$$\partial v_k / \partial\tau + \Psi_k, \quad u_k|_{\tau=0} = 0, \quad v_k|_{\tau=0} = 0. \tag{24}$$

Имеют место оценки

$$u_k(\tau, x, \varepsilon) = O[(u_0(0, x, \varepsilon))^{k(m+1-n)}]\, u_0(\tau, x, \varepsilon),$$
$$v_k(\tau, x, \varepsilon) = O[(u_0(0, x, \varepsilon))^{k(m+1-n)}], \tag{25}$$

где $u_0(\tau, x, \varepsilon)$ — решение уравнения (22).

Теорема 2. *Всякое решение u, v задачи* (1), (19) *во второй полосе Q_2 допускает асимптотическое разложение*

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k\left(\frac{t - t_1^0}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right) + R'_N,$$
$$v(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k v_k\left(\frac{t - t_1^0}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right) + S'_N, \tag{26}$$

а для R_N' и S_N' в области Ω_2, ограниченной прямыми $t = t_1^0$, $t = t_2^0$ и характеристиками системы (1), имеют место равномерные по t, x оценки

$$R'_N = O(\varepsilon^{(N+1)\sigma-(1-\sigma)/(m+1-n)}), \quad S'_N = O(\varepsilon^{(N+1)\sigma}). \tag{27}$$

На построении асимптотики решения в третьей полосе мы здесь не останавливаемся. Отметим только, что ее можно построить, используя результаты работ ([4], [5]).

В заключение выражаю глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР Л. А. Люстернику за постоянное внимание к работе.

Институт математики и механики
Академии наук КазССР
Алма-Ата

Поступило
11 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, ДАН, **132**, № 6 (1960). [2] К. А. Касымов, а) ДАН, **179**, № 2 (1968); б) сборн. Уравнения математической физики и функциональный анализ, Алма-Ата, 1966. [3] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1952. [4] В. А. Треногин, Тр. Моск. физ.-техн. инст., Исследования по механике и прикладной математике, в. 9, 1962. [5] К. А. Касымов, Изв. АН КазССР, в. 3 (1970).