Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 517.512.6

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, А. Д. ГАДЖИЕВ

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этой статье конструируется последовательность линейных положительных операторов весьма общего вида, содержащая как частный случай хорошо изученные операторы С. Н. Бернштейна, Бернштейна — Хлодовского, Г. Миракьяна, В. А. Баскакова и др. Изучаются вопросы равномерной сходимости этих операторов в классе непрерывных функций $C[0, A]$, где $A > 0$ — заданное число, а также свойства их выпуклости или вогнутости.

I. Рассмотрим две последовательности функций $\{\varphi_n(t)\}$ и $\{\psi_n(t)\}$ из класса $C[0, A]$ таких, что

$$\varphi_n(0) = 0, \quad \psi_n(0) \neq 0, \quad \psi_n(t) > 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant A, \ n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

и пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность положительных чисел, обладающих свойствами

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} = 0. \tag{2}$$

Допустим, что последовательность функций трех переменных $\{K_n(x, t, u)\}$ $(x, t \in [0, A], -\infty < u < \infty)$ удовлетворяет условиям:

1°. Каждая функция этой последовательности является целой аналитической функцией относительно u при фиксированных x и t из отрезка $[0, A]$.

2°. $K_n(x, 0, 0) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при любом $x \in [0, A]$.

3°. $\left\{(-1)^\nu \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x, t, u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right\} \geqslant 0$ * $(\nu, n = 1, 2, \ldots; x \in [0, A])$.

4°. $-\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x, t, u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = nx \left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x, t, u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}$ $(\nu, n = 1, 2, \ldots, x \in [0, A])$, где m — натуральное число.

Рассмотрим последовательность линейных положительных операторов

$$L_n[f; x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right) \left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x, t, u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}}\right\} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{\nu!}. \tag{3}$$

Очевидно, что ν-кратным применением свойства 4° оператор (3) можно привести к виду

$$L_n[f; x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right) \frac{n(n+m)\ldots[n+(\nu-1)m]}{\nu!} \times$$
$$\times [\alpha_n\psi_n(0)]^\nu K_{n+\nu m}(x, 0, \alpha_n\psi_n(0))\, x^\nu. \tag{4}$$

II. Покажем, что оператор $L_n[f; x]$ содержит в себе как частный случай ряд известных операторов.

---

* Эта запись означает, что ν раз взята производная по u, потом положено $u = u_1$ и $t = 0$.

1. В случае $K_n(x, t, u) = [1 - xu / (1+t)]^n$ оператор $L_n[f; x]$ принимает вид

$$L_n^{\langle 1 \rangle}[f; x] = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\binom{n}{\nu}[1 - x\alpha_n\psi_n(0)]^{n-\nu}(\alpha_n\psi_n(0)x)^\nu.$$

Условия 1°—4°, очевидно, выполняются, и $m = 1$. При $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/n$ оператор $L_n^{\langle 1 \rangle}[f; x]$ совпадает с классическим полиномом С. Н. Бернштейна.

Кроме того, полагая

$$\alpha_n = n,\ \psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}\left(\lim_{n\to\infty} b_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 0\right),$$

мы приходим к полиномам Бернштейна — Хлодовского

$$L_n^{\langle 2 \rangle}[f; x] = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu}\left(\frac{n}{b_n}\right)^\nu.$$

2. Положим теперь $K_n(x, t, u) = e^{-n(t+xu)}$.

Условия 1°—4°, как легко проверить, выполняются, и $m = 0$. В этом случае $L_n[f; x]$ примет вид

$$L_n^{\langle 3 \rangle}[f; x] = e^{-nx\alpha_n\psi_n(0)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}(\alpha_n\psi_n(0))^\nu.$$

При $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/n$ этот оператор совпадает с оператором Г. М. Миракьяна.

3. Пусть $K_n(x, t, u) = K_n(t + xu)$, где $K_n(z)$ — целая аналитическая функция. Простые вычисления показывают, что в этом случае $L_n[f; x]$ принимает вид

$$L_n^{\langle 4 \rangle}[f; x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{1}{\nu!}K_n^{(\nu)}(x\alpha_n\psi_n(0))[-x\alpha_n\psi_n(0)]^\nu.$$

При $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/n$ мы приходим к операторам В. А. Баскакова (1). Если же положить $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/\alpha_n$ и обозначить $n^2/\alpha_n = \beta_n$, то оператор $L_n^{\langle 4 \rangle}[f; x]$ превратится в другой оператор В. А. Баскакова (2).

III. Относительно сходимости операторов $L_n[f; x]$ в классе $C[0, A]$, где $A > 0$ — заданное число, имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ из класса $C[0, A]$ непрерывна справа в точке $x = A$ и растет на бесконечности не быстрее, чем x^2, то равномерно на $[0, A]$ имеем*

$$\lim_{n\to\infty} L_n[f; x] = f(x).$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно проверить условия известной теоремы П. П. Коровкина (ограничения на рост функции, как указано в (2), не меняют ее доказательства).

Записывая для функции $K_n(x, t, u)$ разложение в ряд Тейлора по степеням $(u - u_1)$, положим в нем $u = \varphi_n(t)$, $u_1 = \alpha_n\psi_n(t)$, где $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ и последовательность $\{\alpha_n\}$ определены в (1) и (2). Полагая затем $t = 0$, в силу условия 2°, получим $L_n[1; x] = 1$.

Далее, согласно 3°, имеем

$$L_n[y; x] = \frac{x\alpha_n}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x, 0, \alpha_n\psi_n(0))\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{\nu!} = \frac{x\alpha_n}{n},$$

и, следовательно, в силу (2), $L_n[y; x] \rightrightarrows x$ $(n \to \infty, x \in [0, A])$. Наконец, применяя дважды условие 3°, получим

$$L_n[y^2; x] = \left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n+m}{n} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}} K_{n+2m}(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)) \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu-2}}{(\nu-2)!} +$$

$$+ \frac{x\alpha_n}{n} \frac{1}{n^2\psi_n(0)} = \left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n+m}{n} + \frac{x\alpha_n}{n} \frac{1}{n^2\psi_n(0)};$$

в силу (2) отсюда следует, что для $x \in [0, A]$ $L_n(y^2; x) \rightrightarrows x^2 (n \to \infty)$. Теорема доказана.

Более общий результат содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Если функция $K_n(x, t, u)$, наряду с условиями 1°—3°, удовлетворяет еще и условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial u} K_n(x, 0, 0) = -x, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} K_n(x, 0, 0) = x^2$$

равномерно относительно $x \in [0, A]$, то последовательность операторов $L_n[f; x]$ равномерно на $[0, A]$ стремится к функции $f(x) \in C[0, A]$, непрерывной справа в точке $x = A$ и растущей на бесконечности не быстрее чем x^2.

Доказательство можно провести тем же методом, как и в [2]. Заметим, что теорему 1 можно получить из теоремы 2.

IV. Теперь покажем, что операторы $L_n[f; x]$ сохраняют выпуклость, вогнутость, полиномиальность любого порядка на отрезке $[0, A]$. Как известно [3], вещественная функция $f(x)$ называется выпуклой, не вогнутой, полиномиальной, не выпуклой, вогнутой k-го порядка на $[a, b]$, если ее разделенная разность $(k+2)$-го порядка $[x_1, x_2, \ldots, x_{k+2}; f]$ для любой системы из $(k+2)$ точек отрезка $[a, b]$, соответственно, >0, $\geqslant 0$, $=0$, $\leqslant 0$, <0. Для функции $F(x) \in C^{(k+1)}[0, A]$, как показал Т. Поповичу (см., например, [3]), условия выпуклости, полиномиальности, вогнутости k-го порядка на $[0, A]$ означают, что на $[0, A]$ имеют место, соответственно, соотношения

$$F^{(k+1)}(x) > 0, = 0, < 0.$$

Допустим теперь, что функция $K_n(x, t, u)$, кроме условий 1°—4°, удовлетворяют еще и условию

$$-\frac{\partial}{\partial x} K_n(x, t, u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = nu_1 K_{n+m}(x, 0, u_1), \tag{5}$$

где m — натуральное число, определенное в 4°.

Дифференцируя (4) по x и учитывая (5), методом индукции можно получить равенство

$$\frac{d^p}{dx^p} L_n[f; x] = \frac{\alpha_n^p p!}{n^{2p}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}, \ldots, \frac{\nu+p}{n^2\psi_n(0)}; f\right] \times$$

$$\times K_{n+(\nu-p)m}(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)) \frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{\nu!} n(n+m)\cdots[n+(\nu+p-1)m] x^\nu,$$

где $[x_1, x_2, \ldots, x_p; f]$ — разделенная разность функции $f(x)$ в узлах $x_1 = \nu / n^2\psi_n(0), \ldots, x_p = (\nu+p) / n^2\psi_n(0)$. С помощью этого представления получается

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ выпуклая (вогнутая) или полиномиальная k-го порядка на полуоси $[0, \infty)$, то последовательность операторов $L_n[f; x]$ на отрезке $[0, A]$ является соответственно выпуклой (вогнутой) или полиномиальной.*

В заключение заметим, что оператор $L_n[f; x]$ можно представить в виде

$$L_n[f;x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{n^{2\nu}} n(n+m)\ldots[n+(\nu-1)m](\alpha_n' x)^\nu \times$$
$$\times \left[0, \frac{1}{n^2\psi_n'(0)}, \ldots, \frac{\nu}{n^2\psi_n'(0)}; f\right] K_{n+\nu m}(0, 0, \alpha_n'\psi_n'(0)).$$

Из этого представления следут, что если $f(x)$ есть полином степени r, то $L_n[f; x]$ есть ее полином степени $\leqslant r$, так как в этом случае все разделенные разности функции $f(x)$ порядка, большего r, равны нулю.

Отметим, что подобные утверждения для оператора В. А. Баскакова [1] доказаны в работе [3].

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР

Поступило
11 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Баскаков, ДАН, 113, 249 (1957). [2] В. А. Баскаков, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, М., 1961. [3] A. Lupas, Mathematica, 9 (32), I, 77 (1967); 11, 295 (1967).