Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. Д. КАРАТОПРАКЛИЕВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 III 1970)

Пусть G — конечная односвязная область трехмерного пространства $\{x_1, x_2, x_3\}$, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Γ, разбивающаяся плоскостью $x_3 = 0$ на две области $G_1 = G \cap \{x_3 > 0\}$ и $G_2 = G \cap \{x_3 < 0\}$, причем $G \cap \{x_3 = 0\}$ — односвязная область на плоскости $\{x_1, x_2\}$. Обозначим через Σ и S те части Γ, где $x_3 \geqslant 0$ и $x_3 < 0$ соответственно.

Рассмотрим в области G оператор

$$Lu = k(x_3)\, u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + c(x)\, u,$$

где $k(x_3)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-h_1, h_2]$ $(-h_1 = \inf\limits_{x \in G} x_3,\ h_2 = \sup\limits_{x \in G} x_3)$ функция, удовлетворяющая условиям: $k(x_3) > 0$ при $x_3 > 0$, $k(x_3) < 0$ при $x_3 < 0$, $k(0) = 0$ и $k'(x_3) > 0$ на отрезке $[-h_1, h_2]$; $c(x)$ — непрерывно дифференцируемая в $\overline{G}$ функция, причем $c(x) \leqslant 0$ в $\overline{G}$.

Будем предполагать, что $S = \sum\limits_{i=1}^{4} S_i$, где $S_1: x_1 = 1 + \int\limits_0^{x_3} \sqrt{-k(\xi)}\, d\xi$,

$$S_2: x_1 = -1 - \int\limits_0^{x_3} \sqrt{-k(\xi)}\, d\xi, \quad S_3: x_2 = -1 \text{ и } S_4: x_2 = 1.$$

Требуется найти в области G решение уравнения

$$Lu = f, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus S_2. \tag{2}$$

В работах А. В. Бицадзе ([1], [2]) впервые были поставлены и исследованы некоторые краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда $k(x_3) = \operatorname{sign} x_3$, $k(x_3) = x_3$ и $c(x) = 0$.

В настоящей работе* рассматривается вопрос о существовании слабых решений и единственности гладкого решения задачи (1) — (2).

Пусть $C^2(\overline{G}, \Gamma \setminus S_2)$ и $C^2(\overline{G}, \Gamma \setminus S_1)$ — множества всех дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{G}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям $u = 0$ на $\Gamma \setminus S_2$ и $u = 0$ на $\Gamma \setminus S_1$. Обозначим через $W_2^2(\text{гр})$ и $W_2^2(\text{гр})^+$ соответственно замыкание множеств $C^2(\overline{G}, \Gamma \setminus S_2)$ и $C^2(\overline{G}, \Gamma \setminus S_1)$ в норме $W_2^2(G)$. Пусть $f \in L_2(G)$.

Слабым решением задачи (1) — (2) будем называть функцию $u \in L_2(G)$, для которой $(u, Lv)_0 = (f, v)_0$ при любом $v \in W_2^2(\text{гр})^+$ (через $(\ ,\ )_0$ обозначаем скалярное произведение в $L_2(G)$).

Как известно ([3]), для существования слабого решения задачи (1) — (2) при любом $f \in L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\|Lv\|_0 \geqslant C\|v\|_0, \quad v \in W_2^2(\text{гр})^+, \quad C > 0.$$

* Результаты этой работы доложены на семинаре А. В. Бицадзе 16 X 1969 г.

Если выполнено более сильное неравенство

$$\|Lv\|_0 \geqslant C\|v\|_1, \quad v \in W_2^2(\text{гр})^+, \quad C > 0, \tag{3}$$

где $\|v\|_1$ — норма в $W_2^1(G)$, то существует слабое решение задачи (1) — (2) при любом $f \in W_2^{-1}(G)$.

Пусть $v \in C^2(\overline{G}, \Gamma \setminus S_1)$ и $p(x)$, $p^i(x)$, $i = 1, 2, 3$, — пока произвольные достаточно гладкие функции. Применяя формулу Остроградского, получаем

$$\int_G (pv + p^i v_{x_i})\, Lv\, dx = \frac{1}{2}\int_G [kp_{x_1x_1} + p_{x_2x_2} + p_{x_3x_3} + 2cp - (cp^i)_{x_i}]\, v^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_G \{[-2kp - kp^1_{x_1} + kp^2_{x_2} + (kp^3)_{x_3}]\, v^2_{x_1} + (-2p + p^1_{x_1} - p^2_{x_2} + p^3_{x_3})\, v^2_{x_2} +$$

$$+ (-2p + p^1_{x_1} + p^2_{x_2} - p^3_{x_3})\, v^2_{x_3} - 2(p^1_{x_2} + kp^2_{x_1})\, v_{x_1}v_{x_2} - 2(p^1_{x_3} + kp^3_{x_1})\, v_{x_1}v_{x_3} -$$

$$- 2(p^2_{x_3} + p^3_{x_2})\, v_{x_2}v_{x_3}\}\, dx + \int_\Gamma (kpvv_{x_1}n_1 + pvv_{x_2}n_2 + pvv_{x_3}n_3)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Gamma \times (-kp_{x_1}n_1 - p_{x_2}n_2 - p_{x_3}n_3 + cp^i n_i)\, v^2 ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Gamma [(kp^1n_1 - kp^2n_2 - kp^3n_3) \times v^2_{x_1} + (-p^1n_1 + p^2n_2 - p^3n_3)\, v^2_{x_2} +$$

$$+ (-p^1n_1 - p^2n_2 + p^3n_3)\, v^2_{x_3} +$$

$$+ 2(p_1n_2 + kp^2n_1)\, v_{x_1}v_{x_2} + (p^1n_3 + kp^3n_1)\, v_{x_1}v_{x_3} + 2(p^3n_2 + p^2n_3)\, v_{x_2}v_{x_3}]\, ds =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \tag{4}$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3).

Рассмотрим сначала I_5. Так как $v = 0$ на $\Gamma \setminus S_1$, то $v_{x_i} = N_v(x)\, n_i$, $i = 1, 2, 3$, на этой поверхности. На S_1 $v_{x_1} = n_1v_n - n_3v_t$, $v_{x_2} = v_b$ и $v_{x_3} = n_3v_n + n_1v_t$, где $t = (\sqrt{-k}/\sqrt{1-k}, 0, -1/\sqrt{1-k})$, $n = (1/\sqrt{1-k}, 0, -\sqrt{-k}/\sqrt{1-k})$ и $b = (0, 1, 0)$. После простых вычислений получаем

$$I_5 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma \setminus S_1} N_v^2 p^i n_i (kn_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\, ds + \frac{1}{2}\int_{S_1} [(1-k)(-p^1n_1 + p^3n_3)\, v_t^2 +$$

$$+ (-p^1n_1 - p^3n_3)\, v_b^2 + 2(1-k)\, p^2 n_1 n_3 v_t v_b]\, ds.$$

Выбираем $p = -1/2$, $p^1 = x_1 - 1 - \varepsilon$, $p^2 = 0$ в $\overline{G}$, где ε — пока произвольная положительная постоянная; $p^3 = x_3 + \delta$ в $\overline{G}_1$, $p^3 = \delta$ в $\overline{G}_2$, где $\delta = \text{const} > 0$.

Принимая во внимание, что $kn_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$ на S_2 и $n_1 = n_3 = 0$ на S_3 и S_4, получаем

$$I_5 = \frac{1}{2}\int_\Sigma N_v^2 [(x_1 - 1 - \varepsilon)\, n_1 + (x_3 + \delta)\, n_3]\, (kn_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{S_1} \frac{1}{\sqrt{1-k}}\, [(1-k)(1 - x_1 + \varepsilon - \delta\sqrt{-k})\, v_t^2 +$$

$$+ (1 - x_1 + \varepsilon + \delta\sqrt{-k})\, v_b^2]\, ds = I_5' + I_5''.$$

Пусть $\varepsilon \geqslant \delta\sqrt{-k(-h_1)}$. Тогда $I_5'' \geqslant 0$, так как $1 - x_1 \geqslant 0$ на S_1. Если поверхность Σ удовлетворяет условию

$$\varphi(x) = (x_1 - 1 - \varepsilon)\, n_1 + (x_3 + \delta)\, n_3 \geqslant 0, \tag{5}$$

то $I_5' \geqslant 0$. Заметим, что существуют кусочно-гладкие поверхности Σ, удовлетворяющие условию (5). Такова, например, поверхность $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$, где Σ_1: $x_1 + qx_3 = 1$, Σ_2: $x_1 - qx_3 = -1$, q — достаточно большая положительная постоянная, Σ_3: $x_2 = -1$ и Σ_4: $x_2 = 1$. Действительно,

$\varphi(x)=0$ на Σ_3 и Σ_4, так как $n_1=n_3=0$ на этих поверхностях. На Σ_2 $n_1= -1/\sqrt{1+q^2}$, $n_3=q/\sqrt{1+q^2}$, откуда следует, что $\varphi(x)\geqslant 0$ на Σ_2. На Σ_1, $n_1=1/\sqrt{1+q^2}$, $n_3=q/\sqrt{1+q^2}$ и, следовательно, получаем $\varphi(x)= (-\varepsilon+\delta q)/\sqrt{1+q^2}$. Если $q\geqslant\varepsilon/\delta$, то $\varphi(x)\geqslant 0$ на Σ_1.

Очевидно, $I_4\geqslant 0$. Поверхностный интеграл I_3 сводится к двойному интегралу

$$I_3=\frac{1}{4}\int_{D_1}\sqrt{-k}\,\frac{\partial\bar v^2}{\partial x_3}\,dx_2dx_3,$$

где D_1 — проекция S_1 на плоскости и $\{x_2, x_3\}$ и $\bar v(x_2,x_3)=v\left[\int_0^{x_3}\sqrt{-k}\,d\xi, x_2, x_3\right]$.

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что $\bar v(x_2-h_1)=0$ и $k(0)=0$, получаем

$$I_3=\frac{1}{8}\int_{D_1}\frac{k'}{\sqrt{-k}}\,dx_2dx_3\geqslant 0.$$

Для I_2 получаем

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{G_1}\{[k+(x_3+\delta)k']\,v_{x_1}^2+3v_{x_2}^2+v_{x_3}^2\}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{G_2}(k'\delta v_{x_1}^2+v_{x_2}^2+v_{x_3}^2)\,dx.$$

Если функция $c(x)$ удовлетворяет условиям

$$-3c-(x_1-1-\varepsilon)c_{x_1}-(x_3+\delta)c_{x_3}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\overline{G}_1, \tag{6}$$
$$-2c-(x_1-1-\varepsilon)c_{x_1}-\delta c_{x_3}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\overline{G}_2, \tag{7}$$

то $I_1\geqslant 0$. Условия (6) и (7) выполняются, если, например, $c=c(x_2)$ в $\overline{G}$.

Принимая во внимание, что $k'(x_3)\geqslant\inf\limits_{-h_1\leqslant x_3\leqslant h_2}k'(x_3)>0$, из (4) получаем

$$\int_G(pv+p^iv_{x_i})\,Lv\,dx\geqslant C_1\int_G\sum_{i=1}^3 v_{x_i}^2dx,\quad C_1>0. \tag{8}$$

Лемма. *Для функций $v\in C^2(\overline{G},\Gamma\setminus S_1)$ выполняется неравенство*

$$\int_G v^2dx\leqslant C_2\int_G\sum_{i=1}^3 v_{x_i}^2dx,\quad C_2>0. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$C_4\|Lv\|_0\|v\|_1\geqslant\int_G(pv+p^iv_{x_i})\,Lv\,dx\geqslant C_3\|v\|_1^2,$$

откуда следует неравенство (3) для $v\in C^2(\overline{G},\Gamma\setminus S_1)$. Путем пополнения убеждаемся в справедливости (3) для $v\in W_2^2(\text{гр})^+$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1. *Если поверхность Σ удовлетворяет условию* (5), *а функция $c(x)$ — условиям* (6) *и* (7), *то существует слабое решение задачи* (1) — (2) *при любом $f\in W_2^{-1}(G)$.*

Аналогично доказывается, что если Σ удовлетворяет условию

$$(x_1+1+\varepsilon)n_1+(x_3+\delta)n_3\geqslant 0, \tag{10}$$

а $c(x)$ — условиям

$$-3c-(x_1+1+\varepsilon)c_{x_1}-(x_3+\delta)c_{x_3}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\overline{G}_1, \tag{11}$$
$$-2c-(x_1+1+\varepsilon)c_{x_1}-\delta c_{x_3}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\overline{G}_2, \tag{12}$$

то для задачи (1) — (2) выполняется неравенство

$$\|Lu\|_0 \geqslant C\|u\|_1, \quad u \in W_2^2(\text{гр}), \quad C > 0. \tag{13}$$

Функции $p(x)$, $p^1(x)$ и $p^3(x)$ выбираются как и выше, а $p^1 = x^1 + 1 + \varepsilon$, причем $\varepsilon \geqslant \delta\sqrt{-k(-h_1)}$. Заметим, что построенная выше поверхность Σ удовлетворяет одновременно условиям (5) и (10).

Гладким решением задачи (1) — (2) будем называть функцию $u \in W_2^2(\text{гр})$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области G. Из неравенства (13) следует

Теорема 2. *Если поверхность Σ удовлетворяет условию* (10), *а функция $c(x)$ — условиям* (11) *и* (12), *то задача* (1)—(2) *может иметь не более одного гладкого решения.*

Замечание 1. Пусть $S = \left(\sum_{i=0}^{k} S_1^i\right) \cup \left(\sum_{i=1}^{k+1} S_2^i\right) \cup S_3 \cup S_4$, где

$$S_1^i\colon x_1 = a_i + \int_0^{x_3} \sqrt{-k}\, d\xi,$$

$$S_2^i\colon x_1 = a_i - \int_0^{x^3} \sqrt{-k}\, d\xi,\ 1 = a_0 > a_1 > \ldots > a_k > a_{k+1} = -1,$$

$$S_3\colon x_2 = -1, \quad S_4\colon x_2 = 1.$$

Граничное условие (2) можно заменить условием $u = 0$ на $\Gamma \Big\backslash \sum_{i=1}^{k+1} S_2^i$.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 справедливы также в случае, когда функции $k(x_3)$ и $c(x)$ имеют разрыв первого рода на плоскости $x_3 = 0$, если $k'(x_3) > 0$ на отрезках $[-h_1, 0]$ и $[0, h_2]$; $k^+ - k^- \geqslant 0$ и $c^- - c^+ \geqslant 0$, где $k^\pm = \lim_{x_3 \to \pm 0} k(x_3)$ и $c^+ = \lim_{x_3 \to \pm 0} c(x)$.

Замечание 3. Задача (1)—(2) рассматривается аналогично в случае m независимых переменных.

Математический институт с вычислительным центром
Болгарской Академии наук
София, Болгария

Поступило
19 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, ДАН, 143, № 5, 1017 (1962). [2] А. В. Бицадзе, Сибирск. матем. журн., 3, № 5, 642 (1962). [3] Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.