Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 517.512.6 *МАТЕМАТИКА*

М.-Б. А. БАБАЕВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ ВИДА $\varphi(x)+\psi(y)$

(Представлено академиком И. Н. Векуа 30 I 1970)

В настоящей работе для некоторого класса функций двух переменных предложен простой способ вычисления значений наилучшего приближения функциями вида $\varphi(x)+\psi(y)$; установлен метод нахождения наилучшей приближающей функции для многочленов двух переменных, при помощи которого найдена наилучшая приближающая функция.

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная на прямоугольнике $Q=[a, b; c, d]$ функция и

$$E[f, \varphi+\psi; Q]_C = E[f] = \inf_{\varphi+\psi} \|f-(\varphi+\varphi)\|, \quad \|f\| = \sup_{x,y\in Q} |f|.$$

Обозначим через П класс функций $f(x, y)$, обладающих свойством: для произвольных $x'' \geqslant x'$, $y'' \geqslant y'$ из Q справедливо

$$f(x'', y'') + f(x', y') \geqslant f(x'', y') + f(x', y'').$$

Пусть Π_- — класс функций $f(x, y)$, для которых $(-f) \in \Pi$. Нетрудно понять, что если $f_{xy} \geqslant 0$, то $f\in\Pi$. Действительно, для произвольных $x'' \geqslant x'$, $y'' \geqslant y'$ имеем

$$0 \leqslant \int\limits_{x'}^{x''}\int\limits_{y'}^{y''} f_{xy}dx\,dy = f(x'', y'') + f(x', y') - f(x'', y') - f(x', y'').$$

Обратное, вообще, не верно, так как функция $f(x, y)$ может не быть дифференцируемой.

Аналогично, если $f_{xy} \leqslant 0$, то $f \in \Pi_-$.

Теорема 1. *Для произвольной непрерывной функции* $f(x, y) \in \Pi$

$$E[f, \varphi+\psi; Q]_C = {}^1/_4[f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)].$$

Этот результат, являющийся усилением теоремы T. J. Rivlin'a и R. J. Sibner'a ([1]) (случай $f_{xy} \geqslant 0$, $Q=[0, 1; 0, 1]$), отличается также методом доказательства.

Отметим также способы ([2-4]) относительно сложные, определения значения наилучшего приближения в общем случае.

Следствие 1. *Для произвольной непрерывной функции* $f(x, y) \in \Pi_-$

$$E[f, \varphi+\psi; Q]_C = -{}^1/_4[f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)].$$

Следствие 2. *Если смешанное производное* f_{xy} *на прямоугольнике* Q *сохраняет знак, то*

$$E[f, \varphi+\psi; Q]_C = {}^1/_4|f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)|.$$

Следствие 3. *Пусть* $f=x^\alpha y^\beta g(x, y)$, *где* α, $\beta \geqslant 0$ — *вещественные числа и* $Q=[0; b; 0, d]$.

Тогда:

а) *если* $f \in \Pi$, *то* $E[f, \varphi + \psi, Q]_c = {}^1/_4 f(b, d)$;

б) *если* $f \in \Pi_-$, *то* $E[f, \varphi + \psi, Q]_c = -{}^1/_4 f(b, d)$.

Следствие 4. *Пусть* $S = [0, 1; 0, 1]$. *Тогда для произвольных вещественных* $\alpha, \beta \geqslant 0$

$$E[x^\alpha y^\beta, \varphi + \psi; S]_c = E[xy, \varphi + \psi; S]_c = {}^1/_4.$$

Это с очевидностью вытекает из следствия 3 и того, что $x^\alpha y^\beta \in \Pi$.

Рассмотрим приближение многочлена двух переменных

$$z = \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} A_{pq} x^p y^q$$

на прямоугольнике Q посредством всевозможных функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$ в метрике пространства C.

Учитывая

$$\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} A_{pq} x^p y^q = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} x^p y^q + \sum_{p=0}^{m} A_{p0} x^p + \sum_{q=1}^{n} A_{0q} y^q,$$

заключаем, что

$$E\Big[\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} A_{pq} x^p y^q, \varphi + \psi\Big] = E\Big[\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} x^p y^q, \varphi + \psi\Big],$$

и если $\varphi_0 + \psi_0$ — наилучшая приближающая многочлена $\sum_0^m \sum_0^n A_{pq} x^p y^q$, то

$$\varphi_0 + \psi_0 - \Big(\sum_{p=0}^{m} A_{p0} x^p + \sum_{q=1}^{n} A_{0q} y^q\Big)$$

является наилучшей приближающей многочлена $\sum_1^m \sum_1^n A_{pq} x^p y^q$.

Поэтому в дальнейшем будем полагать $z = \sum_1^m \sum_1^n A_{pq} x^p y^q$.

Предлагаем следующий метод α определения наилучшей приближающей функции:

$$z = \sum_1^m \sum_1^n A_{pq} x^p y^q,$$

$$z_1 = z, \quad z_{2n} = z_{2n-1} - g_n, \quad z_{2n+1} = z_{2n} + h_n,$$

где

$$g_n = g_n(x) = {}^1/_2 [\hat{\max_{c \leqslant y \leqslant d}} z_{2n-1} + \check{\min_{c \leqslant y \leqslant d}} z_{2n-1}],$$

$$h_n = h_n(y) = {}^1/_2 [\hat{\max_{a \leqslant x \leqslant b}} z_{2n} + \check{\min_{a \leqslant x \leqslant b}} z_{2n}],$$

$$\hat{\max} z = \sum_1^m \sum_1^n \max A_{pq} x^p y^q,$$

$$\check{\min} z = \sum_1^m \sum_1^n \check{\min} A_{pq} x^p y^q;$$

$\widehat{\max} z$ означает сумму максимумов всех членов многочлена, а $\widecheck{\min} z$ — сумму минимумов. Очевидно,

$$\widehat{\max} z \geqslant \max z; \quad \widecheck{\min} z \leqslant \min z.$$

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g_0(x) = g_0, \quad \lim_{n\to\infty} h_n(y) = h_0(y) = h_0.$$

Мы утверждаем, что

$$\|z - (g_0 - h_0)\| = E[z],$$

т. е. $g_0(x) + h_0(y)$ является наилучшей приближающей функцией.

Нам потребуются некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1. *Если для неотрицательных чисел c, d, y при некотором фиксированном i*

$$y^i \geqslant {}^1/_2(c^i + d^i), \quad y^{i+1} < {}^1/_2(c^{i+1} + d^{i+1}),$$

то

$$y^{i+k} < {}^1/_2(c^{i+k} + d^{i+k}), \quad k = 2, 3, \ldots$$

Лемма 2. *Если для неотрицательных чисел c, d и y*

$$y < {}^1/_2(c + d),$$

то

$$y^i < {}^1/_2(c^i + d^i), \quad i = 2, 3, \ldots$$

Следствие. *Если $y^n \geqslant {}^1/_2(c^n + d^n)$, то*

$$y^i \geqslant {}^1/_2(c^i + d^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Действительно, наличие хоть одного неравенства $y^{i_0} < {}^1/_2(c^{i_0} + d^{i_0})$, $i_0 \leqslant n - 1$ влекло бы в силу одной из лемм 1 и 2 $y^n < {}^1/_2(c^n + d^n)$.

Теорема 2. *Метод α позволяет получить для многочлена $z = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} x^p y^q$, $A_{pq} \geqslant 0$, наилучшую приближающую функцию вида $\varphi(x) + \psi(y)$ на прямоугольнике $[a, b; c, d]$, $a, c \geqslant 0$, и этой функцией является многочлен*

$$ {}^1/_2 \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} [x^p (c^q + d^q) + y^q (a^p + b^p) - {}^1/_2 (a^p + b^p)(c^q + d^q)].$$

Автор приносит благодарность акад. АН АзербССР И. И. Ибрагимову за внимание к работе и обсуждение результатов.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР

Поступило
14 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. J. Rivlin, R. J. Sibner, Am. Math. Monthly, **72**, № 10, 1101 (1965). [2] S. P. Diliberto, E. G. Straus, Pacific J. Math., **1**, 195 (1951). [3] М.-Б. А. Бабаев, Докл. АН АзербССР, **23**, № 1, 3 (1967). [4] М.-Б. А. Бабаев, Докл. АН АзербССР, **23**, № 2, 3 (1967).