Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

К. И. БАБЕНКО

К ТЕОРИИ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССЕ S ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 II 1970)

Через S мы будем, как обычно, обозначать класс функций $f(z)$, однолистных в круге $|z|<1$ и нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Тейлоровское разложение $f(z)\in S$ будем записывать в виде $f(z)=\sum\limits_0^\infty a_k z^{k+1}$, $a_0=1$. Класс S становится бикомпактом, если в нем ввести метрику

$$\rho(f,g)=\max_{|z|=1/2}|f(z)-g(z)|,\quad f,g\in S.$$

Для построения теории экстремальных задач на классе S важно уметь находить по данной $f(z)\in S$ функцию $g(z)\in S$, лежащую в заданной ε-окрестности f. Этого можно достичь, например, следующим известным приемом. Функцию $h(z)$, регулярную в некотором кольце $K_{r_0}=\{z:\ r_0<|z|<1\}$, назовем допустимой по отношению к $f(z)$, если $f(z)+h(z)$ регулярна и однолистна в K_{r_0}. Следуя Г. М. Голузину [1], можно показать, что с помощью замены переменных стираются особенности функции $f+h$ и получается функция, регулярная и однолистная в круге $|z|<1$. Такая конструкция всегда осуществима, как только h удовлетворяет некоторому условию малости. Важно подчеркнуть, что регуляризующая замена переменных делается с известной степенью произвола, и этим обстоятельством полезно пользоваться в различных конкретных случаях.

В качестве $h(z)$ всегда можно взять функцию вида

$$\varepsilon\int\limits_{\mathscr{C}}\frac{f(z)}{f(z)-f(t)}\left(\frac{tf'(t)}{f(t)}\right)^2\nu(dt),\tag{1}$$

где $\nu(dt)$ — комплекснозначная мера с носителем $\mathscr{C}$, лежащим в некотором круге $|z|\leqslant r_1<1$, а ε — вещественная константа. В результате регуляризации и последующей нормировки мы получим функцию $f(z,\varepsilon)\in S$. Для фиксированного $r_0<1$ можно указать $\varepsilon_0>0$ такое, что при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ и $|z|\leqslant r_0$ $f(z,\varepsilon)$ представляется в виде сходящегося ряда

$$f(z,\varepsilon)=\sum_0^\infty\frac{\varepsilon^k}{k!}f_k(z),\quad f_0(z)=f(z).$$

Функция $f_k(z)$, $k=1,2,\ldots$, регулярна при $|z|<1$, и мы будем ее называть k-й вариацией функции $f(z)$. Удобно первую и вторую вариации обозначить $\delta f(z)$, $\delta^2 f(z)$ либо $\delta f(z;\nu)$, $\delta^2 f(z;\nu)$. Для первой вариации имеем известную формулу М. Шиффера [2],

$$\delta f(z)=\int\limits_{\mathscr{C}}\left[\frac{f(z)}{f(z)-f(t)}\left(\frac{Df(t)}{f(t)}\right)^2+\frac{Df(z)\,t}{t-z}-f(z)\right]\nu(dt)+$$
$$+Df(z)\int\limits_{\mathscr{C}}\frac{\bar tz}{1-\bar tz}\overline{\nu(dt)}+iC_1(Df(z)-f(z)),\tag{2}$$

где D — дифференциальный оператор $z\,d/dz$, а C_1 — произвольная вещественная константа.

Формулу для $\delta^2 f(z)$ приводить не будем ввиду ее громоздкости.

Коэффициенты степенного ряда функции $\delta f(z)$ будем называть первыми вариациями коэффициентов a_k, $k=1, 2, \ldots$, и обозначать соответственно через δa_k, $k=1, 2, \ldots$ Таким образом, $\delta f(z) = \sum\limits_1^\infty \delta a_k z^{k+1}$. Считая $w \neq 0$, рассмотрим при малых $|z|$ разложение

$$\frac{f^2(z)}{f(z)-w} = \sum_0^\infty q_k(w)\, z^{k+1}. \tag{3}$$

Ясно, что $q_k(w)$ — многочлен от $1/w$ степени k. Введем также функции

$$p_k(z) = \sum_{l=1}^{k} (k-l+1)\, a_{k-l} z^{-l}, \quad l=1, 2, \ldots \tag{4}$$

Из (2) находим

$$\delta a_k = \int\limits_{\mathscr{C}} \mathfrak{A}_k(z)\, \nu(dz) + \int\limits_{\mathscr{C}} \mathfrak{B}_k(\bar z)\, \overline{\nu(dz)} + iC_1 k a_k, \ k=1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}_k(z) = q_k[f(z)]\,(Df(z)\,/\,f(z))^2 + p_k(z) + k a_k, \\ \mathfrak{B}_k(z) = p_k(1/z), \quad k=1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{A}_k(z), \mathfrak{B}_k(z), k=1, 2, \ldots,$ — регулярные функции в круге $|z|<1$, причем $\mathfrak{A}(0)=\mathfrak{B}(0)=0$.

Беря допустимые функции в виде (1), мы получим в заданной окрестности U элемента f, $U=\{g\colon \rho(f, g) \leqslant \varepsilon_0\}$, довольно массивное множество. Поэтому с помощью такого рода вариаций можно решить вопрос о необходимых условиях локального экстремума функционала. Если рассматривать вопрос о достаточных условиях, то необходимо применять допустимые функции более общего вида, нежели (1).

Приведем необходимые условия локального экстремума, ограничиваясь функционалами вида $J(f)=F(a_1, \ldots, a_n)$, где F — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, определенная в шаре $\sum\limits_1^n |a_k|^2 \leqslant R^2$ достаточно большого радиуса. Одно из необходимых условий экстремума, а именно уравнение М. Шиффера, хорошо известно. Считая, что на функции f функционал $J(f)$ стационарен, с помощью (5) получим, в силу произвольности меры $\nu(dz)$ и константы C_1, условия

$$\sum_1^n [\bar\lambda_k \mathfrak{A}_k(z) + \lambda_k \overline{\mathfrak{B}}_k(z)] = 0, \tag{7}$$

$$\operatorname{Im} \sum_1^n \bar\lambda_k k a_k = 0, \tag{8}$$

где $\lambda_k = 2\partial F / \partial \bar a_k$, $k=1, \ldots, n$. Применяя (6), соотношение (7) можно записать в виде

$$Q(f(z))\,(Df(z)\,/\,f(z))^2 + P(z) = 0, \tag{9}$$

где

$$Q(w) = \sum_1^n \bar\lambda_k q_k(w), \quad P(z) = \sum_1^n \left[\bar\lambda_k (p_k(z) + k a_k) + \lambda_k \bar p_k\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{10}$$

Уравнение (9) и есть уравнение М. Шиффера. Из (8) получаем, что $\operatorname{Im} P(z) = 0$, если $|z| = 1$.

Если функционал J на функции f имеет локальный максимум, то вторая вариация функционала должна быть неположительна. Для удобства вычислений вначале рассмотрим случай, когда F — линейная функция $F = \operatorname{Re} \sum\limits_{1}^{n} \overline{\lambda}_k a_k$. Тогда $\delta^2 F = \operatorname{Re} \sum\limits_{1}^{n} \overline{\lambda}_k \delta^2 a_k$. Минуя все промежуточные выкладки, приведем окончательную формулу для $\delta^2 F$. Предварительно введем ряд обозначений. Положим

$$\mathscr{K}(z, t) = [Df(t) / (f(z) - f(t))]^2 - (Df(t) / f(t))^2 - zt / (z - t)^2, \quad (11)$$

а также

$$P^*(z) = \sum_{1}^{n} (k+1)\left[\overline{\lambda}_k p_k(z) - \lambda_k \overline{p}_k\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right], \; R(z) = \sum_{1}^{n} \overline{\lambda}_k p_k(z). \quad (12)$$

Далее положим

$$Q^*(w, z) = \sum_{k=2}^{n} \overline{\lambda}_k \sum_{l=1}^{k-1} (k - l + 1) z^{-l} q_{k-l}(w), \quad Q^*(w) = \sum_{1}^{n} k\overline{\lambda}_k q_k(w). \quad (13)$$

Введем теперь два ядра: симметрическое ядро

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(z, t) = {} & P(z)\mathscr{K}(z, t) + P(t)\mathscr{K}(t, z) + [zP^*(t) - tP^*(z)]/(z - t) + \\ & + (Df(z)/f(z))^2 [Q^*(f(z), t) + Q^*(f(z))] + (Df(t)/f(t))^2 [Q^*(f(t), z) + \\ & + Q^*(f(t))] - R(z) - R(t) + \sum_{1}^{n} \overline{\lambda}_k k^2 a_k \end{aligned} \quad (14)$$

и эрмитово ядро

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(z, \overline{t}) = {} & \frac{z\overline{t}}{(1 - z\overline{t})^2}[P(z) + \overline{P(t)}] - \frac{z\overline{t}}{1 - z\overline{t}}[P^*(z) + \overline{P^*(t)}] - \left(\frac{Df(z)}{f(z)}\right)^2 \times \\ & \times Q^*\left[f(z), \frac{1}{\overline{t}}\right] - \overline{\left(\frac{Df(t)}{f(t)}\right)^2 Q^*\left[f(t), \frac{1}{\overline{z}}\right]} + \overline{R\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} + R\left(\frac{1}{\overline{t}}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Введем еще функцию

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(z) = {} & (\overline{Df(z)}/f(z))^2 Q^*[f(z)] + P^*(z) - R(z) + \overline{R(1/\overline{z})} + \\ & + \sum_{1}^{n} \overline{\lambda}_k k^2 a_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta^2 F = \operatorname{Re} \Big\{ & \int_{\mathscr{C}}\int_{\mathscr{C}} \mathfrak{A}(z, t)\,\nu(dz)\,\nu(dt) - \int_{\mathscr{C}}\int_{\mathscr{C}} \mathfrak{B}(z, \overline{t})\,\nu(dz)\,\overline{\nu(dt)} + \\ & + 2iC_1 \int_{\mathscr{C}} \mathfrak{C}(z)\,\nu(dz) - C_1^2 \sum_{1}^{n} \overline{\lambda}_k k^2 a_k \Big\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Чтобы получить вторую вариацию в общем случае, нужно к выражению (17) добавить квадратичную форму от δa_k, $k = 1, 2, \ldots$, коэффициенты которой вычисляются через вторые производные функции F.

Пользуясь произволом в выборе меры $\nu(dz)$ и постоянной C_1, легко получить из условия $\delta^2 F \leqslant 0$, что

$$P(z) \geqslant 0 \quad \text{при } |z| = 1. \quad (18)$$

О п р е д е л е н и е 1. Однолистную функцию $f(z) \in S$, удовлетворяющую уравнению (9), в котором для $P(z)$ выполняется условие (19), будем называть *э к с т р е м а л ь н о й   о д н о л и с т н о й   ф у н к ц и е й*.

Через S_n будем обозначать совокупность экстремальных функций, удовлетворяющих уравнению (9), в котором $Q(w)$ — многочлен от $1/w$ степени не выше n. Термин экстремальная может быть оправдан тем, что каждая такая функция дает локальный экстремум некоторому функционалу; это довольно глубокий факт, и нам он не потребуется. Из уравнения (9) получаем, что на окружности $|z|=1$ функция $f(z)$ может иметь только конечное число алгебраических особых точек. Таким образом, $f(z)$ отображает круг $|z|<1$ на область, граница которой состоит из конечного числа аналитических дуг. На каждой такой дуге в силу (9) и (18)

$$Q(f(z))\,(df(z)\,/\,f(z))^2 \geqslant 0,$$

т. е. эти дуги принадлежат траекториям дифференциала $Q(w)\,(dw\,/\,w)^2$. Возьмем объединение траекторий этого дифференциала, которые имеют предельные концевые точки в нулях $Q(w)$. Присоединив к построенному множеству точку $w=0$, получим плоский связный граф $\mathscr{G}$ — граф дифференциала $Q(w)\,(dw\,/\,w)^2$. Строение графа квадратичного дифференциала подробно исследовано в работах [3-5]. Важно отметить, что любой цикл графа $\mathscr{G}$ обязательно содержит точку $w=0$. Нетрудно показать, что образ окружности $|z|=1$ при отображении $w=f(z)$ будет деревом $\mathscr{T}\subset\mathscr{G}$. Дереву $\mathscr{T}$ принадлежит точка $w=\infty$, и мы будем считать ее корнем $\mathscr{T}$.

Ниже мы будем изучать вторую вариацию на классе S_n. Каждой $f\in S_n$ отвечает уравнение (9), или, что то же самое, уравнение (7), которое полностью определяется вектором $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Эти векторы будем называть ассоциированными с f. Совокупность всех ассоциированных векторов обозначим через Λ_f, а совокупность тех векторов, для которых имеет место (18), обозначим через K_e или $K_e(f)$; K_e — конус. Заметим, что $\dim K_e \geqslant 1$. Вектор $\lambda\in K_e$ определяет естественным образом линейный функционал $L(f)=\operatorname{Re}\sum_1^n \bar{\lambda}_k a_k$, играющий существенную роль в классе S_n. Преобразуем формулу (17) для второй вариации линейного функционала $L(f)$. Пусть $D(\mathscr{T})$ — область, дополнительная к $\mathscr{T}$. Положим $\xi(w)=\delta f(z)$, $z=f^{-1}(w)$; пусть $\xi(w)=\sum_1^\infty \xi_k w^{k+1}$. Коэффициенты ξ_k, $k=1,2,\ldots$, легко вычисляются через δa_k, $k=1,2,\ldots$ Пусть $Q(w)=\sum_1^n A_k w^{-k}$. Ориентируем произвольным образом дерево $\mathscr{T}$. Тогда на каждом ребре дерева будут определены стороны — левая и правая. Предельные значения функции $\varphi(w)$ на $\mathscr{T}$ слева и справа будем обозначать соответственно через $\varphi_+(w)$, $\varphi_-(w)$. Положим $\xi^*(w)=\sqrt{Q(w)\,/\,w^2}\,\xi(w)$, где берется некоторая ветвь квадратного корня. Оказывается, что вторая вариация является квадратичным функционалом от $\xi(w)$, т. е. от первой вариации. Именно:

$$\delta^2 L(f)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{T}}[\xi_+^*(w)\,d\overline{\xi_+^*(w)}-\xi_-^*(w)\,d\overline{\xi_-^*(w)}]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sum_{l=1}^{n-k}(k+l+2)\,A_{k+l}\xi_l\right\}, \qquad (19)$$

где интеграл по $\mathscr{T}$ понимается как сумма интегралов по ориентированным ребрам. Дюрен и Шиффер в работе [6], предполагая, что дерево $\mathscr{T}$ состоит из одного ребра, установили формулу, близкую к нашей формуле (19).

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
9 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1952. [2] M. Schiffer, Am. J. Math., 65, 341 (1943). [3] O. Teichmöller, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber., 363 (1938). [4] A. C. Schaeffer, D. C. Spencer, Am. Math. Colloq. Publ., № 35 (1950). [5] Д. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, М. 1962. [6] P. Duren, M. Schiffer, J. d'Analyse Math., 10, Jérusalem (1962/63).