Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 1

УДК 513.88 + 517.948 МАТЕМАТИКА

Б. С. ПАВЛОВ

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ И «НЕФИЗИЧЕСКИЙ ЛИСТ» ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 XII 1969)

1. Пусть E — n-мерное комплексное эвклидово пространство, $n < \infty$; $Q(x)$ — кусочно-непрерывная эрмитова $n \times n$-матрица-функция, $-a \leqslant x < \infty$, $0 < a < \infty$, причем * $Q(x) = 0$ при $x > 0$; $Q(x) \geqslant 0$, $x < 0$. В пространстве $L_2(-a, \infty; E)$ рассмотрим самосопряженный оператор L, порожденный дифференциальной операцией

$$lu = -u'' + Q(x)u, \qquad x > -a,$$

и граничным условием $u(-a) = 0$. Наряду с ним рассмотрим соответствующий невозмущенный оператор L_0, порожденный в пространстве $L_2(0, \infty; E)$ дифференциальной операцией $l_0u = -u''$ и граничным условием $u(0) = 0$.

Как известно (см. [1]), разрешающие операторы ** $V(t)$ и $V_0(t)$ для соответствующих волновых уравнений

$$u_{tt} = -Lu, \qquad u_{tt} = -L_0u$$

образуют унитарные группы в пространствах $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_0$ $2n$-компонентных вектор-функций (данных) $U = [u_0, u_1]$, определенных на $(-a, \infty)$ и $(0, \infty)$ соответственно. Роль единичной формы в $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_0$ играет энергия:

$$\| U \|^2_{\mathscr{H}} = {}^1\!/_2\{L\langle u_0, u_0\rangle + (u_1, u_1)\},$$

$$\| U \|^2_{\mathscr{H}_0} = {}^1\!/_2\{L_0\langle u_0, u_0\rangle + (u_1, u_1)_0\}.$$

Здесь $L\langle u_0, u_0\rangle$ и $L_0\langle u_0, u_0\rangle$ — квадратичные формы операторов L и L_0, а (u_1, u_1), $(u_1, u_1)_0$ — скалярные произведения в $L_2(-a, \infty; E)$ и $L_2(0, \infty; E)$. Пространство $\mathscr{H}_0$ изометрически вкладывается в $\mathscr{H}$ как подпространство, и группы $\{V(t)\}$ и $\{V_0(t)\}$ обладают общими приходящими и уходящими подпространствами D_- и D_+ (см. определение в [1]):

$$D_- = \{U;\, U \in \mathscr{H}_0,\, u_0' = u_1\}, \qquad D_+ = \{U;\, U \in \mathscr{H}_0,\, u_0' = -u_1\}.$$

При этом D_- и D_+ ортогональны и в сумме дают все $\mathscr{H}_0$.

Пользуясь схемой Адамяна — Арова [2], можно определить оператор рассеяния для групп $\{V_0(t)\}$ и $\{V(t)\}$. Следующее утверждение дает явный вид для оператора рассеяния $S(V_0, V)$ в спектральном представлении (см. [1]) группы $\{V(t)\}$.

Обозначим через $f(x, k)$ решение уравнения

$$lf(x, k) = k^2 f(x, k), \qquad f(x, k) \in E \times E, \qquad x > -a, \tag{1}$$

обладающее свойством $f(x, k)e^{ikx} = I$, $x > 0$, $\operatorname{Im} k = 0$ (см. [3]).

---

* Условие неотрицательности $Q(x)$ при $x < 0$ не существенно, однако позволяет значительно упростить ряд рассуждений по сравнению с общим случаем (аналогичная ситуация обсуждается, например, в [1], гл. 6).

** Действие операторов $V(t)$ и $V_0(t)$ состоит в переводе данных решения $U_0 = \left[u(0), \dfrac{du}{dt}(0)\right]$, отвечающих начальному моменту времени, в данные решения $U(t) = \left[u(t), \dfrac{du}{dt}(t)\right]$, отвечающие моменту t.

Теорема 1. *В спектральном представлении группы $\{V(t)\}$ оператор рассеяния $S(V_0, V)$ совпадает с оператором умножения в $L_2(-\infty, \infty; E)$ на матричную функцию*

$$\mathscr{S}(k) = f^{-1}(-a, -k) f(-a, k), \qquad -\infty < k < \infty. \tag{2}$$

Матрица $\mathscr{S}(k)$ называется субоператором рассеяния (или матрицей рассеяния) для пары * (V_0, V). В силу ортогональности D_- и D_+ $\mathscr{S}(k)$ является внутренней функцией в верхней полуплоскости. На всю комплексную плоскость $\mathscr{S}(k)$ продолжается как мероморфная функция с полюсами в нижней полуплоскости.

Пусть $\mathscr{K} = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_0$, и $P\mathscr{K}$ — ортопроектор на $\mathscr{K}$ в $\mathscr{H}$. Подпространство $\mathscr{K}$ состоит из всех данных $U \in \mathscr{H}$ таких, что $u_1(x) = 0$, $x > 0$; $u_0(x) = u_0(0)$, $x > 0$.

Рассмотрим две полугруппы сжатий в $\mathscr{K}$ (см. [1, 2]):

$$Z_+(t) = P\mathscr{K} V(t) P\mathscr{K}, \qquad t > 0,$$

$$Z_-(t) = P\mathscr{K} V(t) P\mathscr{K} \qquad t < 0.$$

Обозначим через iB_+ (iB_-) генератор полугруппы $\{Z_+(t)\}$ ($\{Z_-(t)\}$). Очевидно, $B_- = B_+^*$. Спектр B_+ совпадает с множеством корней ** матрицы рассеяния (см. [1, 4]). Ввиду вещественности оператора L выполнено условие $\mathscr{S}(k) = \mathscr{S}^*(-\bar{k})$; спектр B_+ расположен в верхней полуплоскости, симметричен относительно мнимой оси и состоит из собственных значений, накапливающихся на бесконечности. В дальнейшем (теорема 3) мы покажем, что все достаточно далекие корни матрицы рассеяния просты. Отсюда следует, что соответствующие собственные значения k_m оператора B_+ являются простыми полюсами его резольвенты. Отвечающие им нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \sqrt{2 \operatorname{Im} k_m} \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{k_m} \\ 1 \end{pmatrix} f(x, k_m)\, \pi_m, & x \leqslant 0, \\[2ex] \sqrt{2 \operatorname{Im} k_m} \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{k_m} \\ 0 \end{pmatrix} \pi_m, & x > 0. \end{cases}$$

Здесь $f(x, k_m)$ — введенное выше решение уравнения (1) и $\pi \in \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_m)$, $\| \pi_m \|_E = 1$. Для собственных функций оператора B_-, отвечающих собственному числу $\bar{k}_m$, имеем

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \sqrt{2 \operatorname{Im} k_m} \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{k_m} \\ 1 \end{pmatrix} f(x, -\bar{k}_m)\, \Delta_m, & x \leqslant 0, \\[2ex] \sqrt{2 \operatorname{Im} k_m} \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{k_m} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_m, & x > 0, \end{cases}$$

где $\Delta_m \in \operatorname{Ker} \mathscr{S}^*(k_m)$, $\| \Delta_m \|_E = 1$. При согласованном выборе векторов Δ_m и π_m системы $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m\}$ становятся биортогональными ***. При этом

$$(\psi_m, \varphi_m) = 2i \operatorname{Im} k_m (\mathscr{S}'(k_m) \pi_m, \Delta_m)_E.$$

Для того чтобы связать операторы B_- и B_+ с аналитическим продолжением резольвенты оператора L на «нефизический лист», мы используем формулу абстрактного характера, связывающую резольвенты операторов

---

* Как следует из (2), матрица рассеяния, определенная в [1], совпадает с $\mathscr{S}^{-1}(k)$, т. е. с матрицей рассеяния для пары (V, V_0).

** k_0 есть корень $\mathscr{S}(k)$, если $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_0) > 0$; k_0 есть простой корень $\mathscr{S}(k)$, если $\mathscr{S}'(k_0)\pi \neq 0$, $\pi \in \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_0)$, $\pi \neq 0$.

*** Если $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_m) = 1$, то условие биортогональности выполняется автоматически. Этот случай наиболее важен в дальнейшем.

L, B_+ и B_- при $\operatorname{Im} k > 0$:

$$P_{\mathscr{K}} \begin{pmatrix} R_{k^2}(L) & 0 \\ 0 & R_{k^2}(L) \end{pmatrix} P_{\mathscr{K}} = \frac{1}{2k} \left[R_k(B_-) - R_{-k}(B_+) \right]. \tag{3}$$

Правая часть формулы (3), очевидно, допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k < 0$ как мероморфная функция с полюсами в точках $\bar{k}_m$. Следовательно, и левая часть формулы (3) допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость, что соответствует аналитическому продолжению резольвенты $R_{k^2}(L)$ оператора L на «нефизический лист». Продолженная таким образом функция $P_{\mathscr{K}} \begin{pmatrix} R_{k^2}(L) & 0 \\ 0 & R_{k^2}(L) \end{pmatrix} P_{\mathscr{K}}$ оказывается мероморфной во всей плоскости k, и ее полюсы совпадают с полюсами матрицы рассеяния. Используя формулу (3), можно подсчитать главную часть резольвенты $R_{k^2}(L)$ в простом полюсе $\bar{k}_m$ (мы считаем, что $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_m) = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}^*(k_m) = 1$)

$$(R_{k^2} f, g) = \frac{i}{2\bar{k}_m (\pi_m, S'(-\bar{k}_m)\Delta_m)} \frac{1}{\bar{k}_m - k} \times$$
$$\times \int_{-a}^{0} (f(y, -\bar{k}_m)\Delta_m, g(y))_E dy \cdot \int_{-a}^{0} (f(x), f(x, k_m)\pi_m)_E dx. \tag{4}$$

Здесь $f, g \in L_2(-a, 0; E)$. В случае $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_m) > 1$ при согласованном выборе систем $\{\Delta_m{}^j\}_{j\geqslant 1}$, $\{\pi_m{}^j\}_{j\geqslant 1}$ в $\operatorname{Ker} \mathscr{S}^*(k_m)$ и в $\operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_m)$ формула (4) сохраняется, следует лишь выполнить суммирование по j, $j = 1, 2, \ldots, \dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}(k_m)$.

2. Исследуем подробнее аналитические свойства матрицы рассеяния $\mathscr{S}(k)$. Мы будем считать, что потенциал $Q(x)$ непрерывен слева. В этом случае в E существует непрерывное слева монотонное семейство ортопроекторов $\{p(x)\}$ такое, что выполнено условие:

$$Q(x')p(x) = 0, \quad x' > x, \quad p(+0) = I,$$

и при этом $p(x)$ — максимальный проектор, удовлетворяющий этому условию. Обозначим через $-a_j$ точки скачков системы $\{p(x)\}$, и пусть

$$p_j = p(-a_j + 0) - p(-a_j). \tag{5}$$

Всюду в дальнейшем мы считаем, что

1⁰. Матрица-функция $Q(x)p_j$ непрерывна и непреырвно дифференцируема l_0 раз при $x \leqslant -a_j$.

Нетрудно убедиться, что при условии 1⁰ подпространства p_jE приводят оператор $Q^{(s)}(-a_j) = \frac{d^s Q}{dx^s}(-a_j)$, $s \leqslant l_0$. Пусть теперь $E_{js}' \subset p_jE$ — подпространство, на котором матрица $Q^{(s)}(-a_j)$ невырождена, $Q^{(s)}(-a_j) \times [p_jE \ominus E_{js}'] = 0$, и

$$E_{js} = \overline{E'_{j0} + E'_{j1} + \cdots + E'_{js}},$$

а p_{js} — ортопроектор на $E_{js} \ominus E_{js-1}$. Мы считаем, что выполнено условие

2⁰. $E_{jl_0} = p_jE$ и матрица $p_{js}\,Q^{(s)}(-a_j)\,p_{js}$ невырождена, если $p_{js} \neq 0$.

Далее, обозначим через $q_{jst} \equiv q_\sigma$, $t \geqslant 1$, собственные числа оператора $p_{js}Q^{(s)}(-a_j)\,p_{js}$ в подпространстве $p_{js}E$ и через $p_{jst} = p_\sigma$ — ортопроекторы на соответствующие собственные подпространства. Чтобы избежать громоздких обозначений, мы условимся считать их одномерными. Очевидно, выполнено

$$p_jE = \sum_s \oplus\, p_{js}E = \sum_{st} \oplus\, p_{jst}E.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1^0, 2^0, *то справедливы следующие утверждения*: а) *все корни* $\mathcal{S}(k)$, *лежащие вне достаточно большого круга, простые;* б) *совокупность* $\{k_m\}$ *корней матрицы рассеяния асимптотически распадается на* n, $n = \dim E$, *последовательностей* $\{k_l^\sigma\}$ *таким образом, что для ортопроекторов* P *в* E *на* $\operatorname{Ker}\mathcal{S}(k_l^\sigma)$ *и* $\operatorname{Ker}\mathcal{S}^*(k_l^\sigma)$ *справедливы соотношения*

$$P_{\operatorname{Ker}\mathcal{S}^*(k_l^\sigma)} \to p_\sigma, \quad l \to \pm\infty, \qquad P_{\operatorname{Ker}\mathcal{S}(k_l^\sigma)} \to p_\sigma, \quad l \to \pm\infty, \tag{6}$$

где сходимость понимается по операторной норме в E; в) *соответственно системы собственных векторов* $\{\psi_l^\sigma\}$ *и* $\{\varphi_l^\sigma\}$ *операторов* B_+ *и* B_-, *отвечающие собственным числам* $\{k_l^\sigma\}$ *и* $\{\bar{k}_l^\sigma\}$, *распадаются на серии*

$$\{\psi\}^\sigma = \{\psi_l^\sigma\}_{l=\ldots-1,0,1,2\ldots}, \quad \{\varphi\}^\sigma = \{\varphi_l^\sigma\}_{l=\ldots-1,0,1,2\ldots},$$

которые асимптотически ортогональны

$$(\psi_l^\sigma, \psi_l^{\sigma'}) \to 0, \quad l \to \pm\infty, \quad \sigma \neq \sigma', \qquad (\varphi_l^\sigma, \varphi_l^{\sigma'}) \to 0, \quad l \to \pm\infty, \quad \sigma \neq \sigma'.$$

г) *для собственных чисел* * $k_l^\sigma = k_l^{jst}$, ***отвечающих серии*** $\{\psi\}^\sigma$, *верна асимптотика* ** *при* $l \to \pm\infty$ (Ln — *главное значение логарифма*).

$$k_l^{jst} = \frac{\pi l}{a - a_j} - i\,\frac{s+2}{a - a_j}\operatorname{Ln}\frac{l\pi}{a - a_j} - i\,\frac{1}{2(a - a_j)}\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2+s} q_{jst} - \frac{\pi}{2(a - a_j)} + o(1). \tag{7}$$

Замечание. В формуле (7) хорошо видна «серийная» структура множества корней матрицы рассеяния, а значит, и полюсов резольвенты $R_{k^2}(L)$ на нефизическом листе. Грубая структура серий определяется набором точек a_j. Более тонкая структура определяется порядком самой младшей производной $Q(x)$, отличной от нуля в пространстве $p_{js}E$; еще более тонкая структура определяется набором собственных значений q_{jst}, $t \geqslant 1$, оператора $p_{js}\,\dfrac{d^sQ}{dx^s}(a_j)\,p_{js}$. Если оператор $\dfrac{d^sQ}{dx^s}(a_j)\,p_{js}$ имеет кратные собственные значения, то соответствующие им серии собственных чисел $\{k_l^\sigma\}$ асимптотически неразличимы.

Описанная классификация собственных функций и собственных чисел оператора B_+ родственна предложенной в [5] классификации собственных подпространств базисного оператора, связанной с «карлесоновскими сериями». В связи со сказанным отметим, что в рассматриваемом случае серии не являются карлесоновскими. Это отвечает тому факту, что система $\{\psi_l^\sigma\}$ не есть базис Рисса. В действительности, справедлива формула

$$(\psi_l^\sigma, \varphi_l^\sigma) \sim -2i\,\operatorname{Im} k_l^\sigma\,(q_\sigma)^{a/(a-a_j)}\,(k_l^\sigma)^{-a(s+2)/(a-a_j)}, \quad l \to \pm\infty,$$

из которой видно, что система $\{\psi_l^\sigma\}$ не является даже равномерно минимальной.

В заключение отметим, что аналитические свойства матрицы рассеяния, сформулированные в теореме 3, позволяют исследовать полноту системы собственных функций операторов B_+ и B_-, а также полноту соответствующей «однокомпонентной системы» $\{f(x, k_m)\}$. Это будет сделано в другом месте.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 12 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Lax, R. Phillips, Scattering Theory, N. Y.— London, 1967. [2] В. М. Адамян, Д. З. Аров, Матем. исследования, 1, в. 2, АН МССР, 1966. [3] З. С. Агранович, В. А. Марченко, Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960. [4] B. Sz-Nagy, C. Foias, Analyse Harmonique des Operateurs de l'espace de Hilbert, Budapest, 1967. [5] Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, ДАН, **184**, № 4 (1969). [6] T. Regge, Nuovo Cimento, 8, № 5 (1958). [7] А. О. Кравицкий, ДАН, **170**, № 6 (1966).

* Нумерация k_l^σ асимптотическая по l.

** В случае $\dim E = 1$ аналогичная асимптотика содержится в [6,7]. Серийная структура асимптотики в этом случае тривиальна — имеется лишь одна серия.