Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 1

УДК 518:517.91/.94 *МАТЕМАТИКА*

Ю. В. РАКИТСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 25 XII 1969)

Пусть в замкнутой выпуклой по z области $\Pi(|t-t_0| \leqslant T,\ |z_i(t) - z_i| \leqslant R)$ существует решение задачи Коши для системы

$$dz / dt = f(t, z), \quad z(t_0) = z_0, \tag{1}$$

где $z(t)$ — m-мерный вектор.

Если для интегрирования задачи (1) применяется численный метод с шагом интегрирования h и ошибкой на отдельном шаге $e_n = O(h^{s+1})$, то предполагается, что ошибка округления, допускаемая на отдельном шаге, $\Gamma_n = O(h^{s+2})$, и заданная вектор-функция $f(t, z)$ в области Π непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до $(s+1)$-го порядка включительно. Предполагается также, что точки приближенного решения принадлежат области Π.

Приняты обозначения: z_n — приближенное решение задачи (1); $t_n = t_0 + nh$; n — целое число; h — шаг интегрирования; $f_n = f(t_n, z_n)$; $z(t_n)$ — точное решение задачи (1), взятое при $t = t_n$; $u(t)$ — матричная функция $(m \times m)$, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z} u, \quad u(t_0) = E,$$

где E — единичная матрица $(m \times m)$; матрица $\partial f / \partial z = (\partial f_i(t, z) / \partial z_k)$ $(i, k = 1, \ldots, m)$.

Теорема 1. *Для приближенного решения задачи* (1) *методом Рунге — Кутта третьей степени*:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}\Big[f\Big(t_n + h,\ z_n + 2hf\Big(t_n + \frac{h}{2},\ z_n + \frac{h}{2} f_n\Big) - hf_n\Big) + 4f\Big(t_n + \frac{h}{2},\ z_n + \frac{h}{2} f_n\Big) + f_n\Big]$$

справедлива асимптотическая формула при $h \to 0$:

$$z_n = z(t_n) + \frac{h^3}{24}\Big[z'''(t_n) - u(t_n) z'''(t_0) + \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)_{t=t_n} z''(t_n) - u(t_n)\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)_{t=t_0} z''(t_0) - \int_{t_0}^{t} u(t_n) u^{-1}(\tau) z^{(\mathrm{IV})}(\tau)\, d\tau\Big] + O(h^4).$$

Теорема 2. *Если приближенное решение* (1) *вычисляется методом Рунге — Кутта четвертой степени вида*

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(k_{1n} + 2k_{2n} + 2k_{3n} + k_{4n}),$$

$$k_{1n} = f(t_n, z_n), \quad k_{2n} = f\Big(t_n + \frac{h}{2},\ z_n + \frac{h}{2} k_{1n}\Big),$$

$$k_{3n} = f\Big(t_n + \frac{h}{2},\ z_n + h\frac{k_{2n}}{2}\Big), \quad k_{4n} = f(t_n + h,\ z_n + hk_{3n}),$$

то приближенное решение будет $(h \to 0)$:

$$z_n = z(t_n) + h^4 \Big\{ \frac{5}{576} [z^{(IV)}(t_n) - u(t_n) z^{(IV)}(t_0)] +$$

$$+ \frac{1}{144} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{t=t_n} z'''(t_n) - u(t_n) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{t=t_0} z'''(t_0) \right] + \frac{1}{96} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2_{t=t_n} z''(t_n) - \right.$$

$$\left. - u(t_n) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2_{t=t_0} z''(t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'_{t=t_n} z''(t_n) - u(t_n) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'_{t=t_0} z''(t_0) \right] -$$

$$- \int_{t_0}^{t_n} u(t_n) u^{-1}(\tau) \left[\frac{z^{(V)}(\tau)}{120} + \frac{1}{96} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'' z''(\tau) + \frac{1}{48} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)' z'''(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{192} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (z''(\tau))^2 \right] d\tau \Big\} + O(h^5).$$

Теорема 3. *В случае применения метода Рунге — Кутта четвертой степени вида*

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} (k_{1n} + 4k_{3n} + k_{4n}),$$

$$k_{1n} = f(t_n, z_n), \quad k_{2n} = f\left(t_n + \frac{h}{4},\ z_n + \frac{h}{4} k_{1n}\right),$$

$$k_{3n} = f\left(t_n + \frac{h}{2},\ z_n + \frac{h}{2} k_{2n}\right), \quad k_{4n} = f(t_n + h, z_n + hk_{1n} - 2hk_{2n} + 2hk_{3n})$$

для приближенного решения имеет место разложение

$$z_n = z(t_n) + h^4 \Big\{ \frac{5}{576} [z^{(IV)}(t_n) - u(t_n) z^{(IV)}(t_0)] + \frac{1}{144} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{t=t_n} z'''(t_n) - \right.$$

$$\left. - u(t_n) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{t=t_0} z'''(t_0) \right] + \frac{1}{192} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2_{t=t_n} z''(t_n) - u(t_n) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2_{t=t_0} z''(t_0) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'_{t=t_n} z''(t_n) - u(t_n) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'_{t=t_0} z''(t_0) \right] - \int_{t_0}^{t_n} u(t_n) u^{-1}(\tau) \left[\frac{z^{(V)}(\tau)}{120} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{192} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'' z''(\tau) + \frac{1}{96} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)' z'''(\tau) \right] d\tau \Big\} + O(h^5), \quad h \to 0.$$

Теорема 4. *Приближенное решение, вычисляемое неявным методом четвертой степени*

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} \left[f_{n+1} + 4f\left(t_n + \frac{h}{2},\ \frac{z_{n+1} + z_n}{2} - \frac{hf_{n+1} - hf_n}{8}\right) + f_n \right], \qquad (2)$$

может быть записано в виде

$$z_n = z(t_n) + h^4 \left[\frac{z^{(IV)}(t_n) - u(t_n) z^{(IV)}(t_0)}{576} - \frac{1}{720} \int_{t_0}^{t_n} u(t_n) u^{-1}(\tau) z^{(V)}(\tau) d\tau \right] +$$

$$+ O(h^5), \quad h \to 0.$$

Теорема 5. *Если для получения приближенного решения применяется метод шестой степени* (θ — *параметр*, $0{,}5 - 0{,}5\sqrt{0{,}6} \leqslant \theta < 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{0{,}2}$)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{60} \left[\frac{-1 + 10\theta - 10\theta^2}{\theta - \theta^2} (f_{n+1} + f_n) + 32 \frac{1 - 5\theta + 5\theta^2}{(1 - 2\theta)^2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{f(t_{n+1} - h\theta, u_n) + f(t_n + h\theta, W_n)}{(\theta - \theta^2)(1 - 2\theta)^2} \right],$$

$$v_n = \frac{z_{n+1} + z_n}{2} + \frac{h(1 - 8\theta + 8\theta^2)}{64(\theta - \theta^2)} (f_{n+1} - f_n) - \frac{hf(t_{n+1} - h\theta, y_n) - hf(t_n + h\theta, x_n)}{64(\theta - \theta^2)(1 - 2\theta)},$$

$$y_n = \theta^2[z_n(3-2\theta) + h(1-\theta)f_n] + (1-\theta)^2[z_{n+1}(1+2\theta) - h\theta f_{n+1}],$$
$$x_n = (\theta-1)^2[(1+2\theta)z_n + h\theta f_n] + \theta^2[z_{n+1}(3-2\theta) + h(\theta-1)f_{n+1}], \quad (3)$$
$$u_n = \theta^2(1-2\theta)^2[z_n(7-6\theta) - h(\theta-1)f_n] + (1-2\theta)^2(1-\theta)^2 \times$$
$$\times [z_{n+1}(1+6\theta) - h\theta f_{n+1}] + 16\theta^2(\theta-1)^2[v_n - h(\theta - {}^1/_2)f(t_n + h/2, v_n)],$$
$$w_n = (1-\theta)^2(1-2\theta)^2[z_n(1+6\theta) + h\theta f_n] + \theta^2(1-2\theta)^2 \times$$
$$\times [z_{n+1}(7-6\theta) + h(\theta-1)f_{n+1}] + 16(\theta-1)^2\theta^2 \times$$
$$\times [v_n + h(\theta - {}^1/_2)f(t_n + h/2, v_n)],$$

то оно может быть записано асимптотической формулой при $h \to 0$

$$z_n = z(t_n) + h^6\Big\{-\frac{1-\theta+\theta^2}{86400}[z^{(\mathrm{VI})}(t_n) - u(t_n)z^{(\mathrm{VI})}(t_0)] -$$
$$-\frac{\theta-\theta^2}{14400}\Big[5\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)'_{t=t_n} z^{(\mathrm{IV})}(t_n) - 5u(t_n)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)'_{t=t_0} z^{(\mathrm{IV})}(t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)'_{t=t_n} z^{(\mathrm{V})}(t_n) -$$
$$-u(t_n)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{t=t_0} z^{(\mathrm{V})}(t_0)\Big] + \int_{t_0}^{t_n} u(t_n)u^{-1}(\tau)\Big\{\frac{z^{(\mathrm{VII})}(\tau)}{100800} -$$
$$-\frac{\theta-\theta^2}{14400}\Big[5\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)'' z^{(\mathrm{IV})}(\tau) + 6\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)' z^{(\mathrm{V})}(\tau)\Big]\Big\}d\tau\Big\} + O(h^7).$$

Все рассмотренные в статье методы численного интегрирования можно назвать функциональными, так как они являются функциональными аппроксимациями формул Маклорена и Дарбу.

Формулы (2) и (3) могут успешно применяться в качестве коррекции и контроля для методов Рунге — Кутта и непосредственно при решении краевых задач.

Асимптотические формулы погрешности функциональных методов получены на базе идей асимптотики решений задачи (1) методами Рунге — Кутта [1–3]. Существо формул погрешности, приведенных в статье, состоит в том, что при больших $|t_n - t_0|$ ошибка определяется интегральными членами и практически не зависит от остальных составляющих, аналогично тому как в методах типа Адамса при больших $|t_n - t_0|$ погрешность решений практически не зависит от ошибок в расчете начала таблицы [4].

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
16 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Ракитский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1, 6, 947 (1961). [2] P. Henrici, Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, N. Y., 1962. [3] А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 3, 1, 195 (1963). [4] Ю. В. Ракитский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, 1, 13 (1968).