Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 519.81 *МАТЕМАТИКА*

И. В. ОСТРОВСКИЙ

О БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНАХ, ИМЕЮЩИХ ТОЛЬКО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 4 II 1970)

Одной из основных проблем теории разложений вероятностных законов является проблема описания класса I_0 — класса безгранично делимых законов, имеющих только безгранично делимые компоненты. Изучению этой проблемы посвящены исследования Г. Крамера, П. Леви, А. Я. Хинчина, Д. А. Райкова, Ю. В. Линника, результаты которых подытожены в монографии Ю. В. Линника ([1]). Эти результаты были в последнее время дополнены в работах ([2-9]). Решить проблему до конца не удалось, однако получено довольно много различных либо необходимых, либо достаточных условий для принадлежности к I_0.

Ю. В. Линник ([1]) (стр. 79) ввел понятие об α-компоненте закона, обобщающее понятие обычной компоненты. Напомним, что закон F_1 называется α-компонентой закона F, если существуют законы $F_2, \ldots, F_n$, положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и последовательность $t_k \to 0$ такие, что при $t = t_k$ имеем

$$\varphi(t, F) = \{\varphi(t, F_1)\}^{\alpha_1} \ldots \{\varphi(t, F_n)\}^{\alpha_n}, \tag{1}$$

где $\varphi(t, F), \varphi(t, F_1), \ldots, \varphi(t, F_n)$ — характеристические функции законов $F, F_1, \ldots, F_n$ соответственно. Ю. В. Линник обратил внимание автора на проблему описания класса I_0^α — класса безгранично делимых законов, имеющих только безгранично делимые α-компоненты. Очевидно, $I_0^\alpha \subset I_0$.

Один из результатов, полученных Ю. В. Линником ([1]) (стр. 242), можно рассматривать как достаточное условие для принадлежности I_0^α. Этот результат можно сформулировать так.

Пусть F — безгранично делимый закон,

$$\varphi(t, F) = \exp\left\{i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x)\right\} \tag{2}$$

представление его характеристической функции $\varphi(t, F)$ формулой Леви — Хинчина. Для того чтобы закон F принадлежал I_0^α, достаточно выполнения следующих условий: а) функция $G(x)$ является функцией скачков, а ее точки разрыва содержатся во множестве вида

$$\{0\} \cup \{\mu_{k1}\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{\infty},$$

где $\mu_{k1} > 0$, $\mu_{k2} < 0$, а числа $\mu_{k+1, r} / \mu_{kr}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ r = 1, 2)$ — натуральные, отличные от единицы; б) * для некоторого $K > 0$ выполняется

$$\int_{|x|>y} dG(x) = O(\exp\{-Ky^2\}), \quad y \to +\infty.$$

Цель настоящей работы — указать достаточное условие принадлежности I_0^α, существенно отличное от условия Ю. В. Линника и представляющее, как нам кажется, интерес по следующей причине. Будем называть

* Заметим, что в ([1]) (стр. 242) условие б) заменено более сильным условием ограниченности множества точек разрыва $G(x)$. Условие б) введено автором ([3]) (стр. 235).

пуассоновым спектром безгранично делимого закона F множество отличных от нуля точек роста функции $G(x)$, фигурирующей в представлении его характеристической функции $\varphi(t, F)$ формулой Леви — Хинчина. Можно поставить вопрос: какое замкнутое множество на прямой может служить после удаления точки 0 пуассоновым спектром закона класса I_0^α? Из нашего результата следует, что — любое совершенное множество, в частности, вся прямая. Заметим, что для законов, удовлетворяющих достаточному условию, указанному Ю. В. Линником, пуассонов спектр очень редкий, он состоит из изолированных точек, могущих сгущаться только к 0 и ∞, причем со скоростью, не меньшей, чем у геометрической прогрессии со знаменателем 2 *.

Кроме того, из нашего результата следует, что класс I_0^α является плотным в смысле слабой сходимости множеством в классе всех безгранично делимых законов.

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть F — безгранично делимый закон, характеристическая функция которого имеет вид*

$$\varphi(t, F) = \exp\left\{i\beta t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dG(x)\right\} \tag{3}$$

где β — действительное число, $G(x)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:

а) *Она является функцией скачков, точки разрыва которой образуют множество с линейно независимыми точками* **:

б) *для некоторого $K > 0$ выполняется*

$$\int\limits_{|x|>y} dG(x) = O(\exp\{-Ky^2\}),\ y \to +\infty.$$

Тогда $F \in \mathrm{I}_0^\alpha$.

Эта теорема примыкает к теореме 2 нашей работы ([4]), где указаны иные условия на функцию $G(x)$, обеспечивающие принадлежность закона с характеристической функцией вида (3) классу I_0. Преимущество теоремы 1 в том, что она дает условия принадлежности I_0^α, а не I_0, и, кроме того, пуассонов спектр закона не предполагается лежащим на положительной полуоси и ограниченным. Однако теорема 1 не содержит теоремы 2 работы ([4]), так как там функция $G(x)$ не предполагалась функцией скачков.

Отметим два следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть E — замкнутое множество на прямой, $E = P \cup R$ — его разложение на непересекающиеся совершенное P и не более чем счетное R множества. Если R либо пусто, либо является множеством с линейно независимыми точками, то существует закон $F \in \mathrm{I}_0^\alpha$, пуассонов спектр которого совпадает с $E \setminus \{0\}$.*

Действительно, легко видеть, что в P можно указать счетное плотное множество Q такое, что $Q \cup R$ является множеством с линейно независимыми точками. Пусть $Q \cup R = \{x_k\}$; $G(x)$ — функция скачков, множество точек разрыва которой совпадает с $\{x_k\}$ и скачок которой в точке x_k равен $2^{-k}e^{-x_k^2}$. Подставляя эту функцию в правую часть (3), получим искомый закон F.

Следствие 2. *Класс I_0^α является плотным в классе всех безгранично делимых законов в том смысле, что для любого безгранично делимого закона F можно указать последовательность законов $F_n \in \mathrm{I}_0^\alpha$ такую, что F_n при $n \to \infty$ слабо сходится к F.*

---

* Это объясняется наличием гауссовой компоненты.

** Множество A на прямой мы называем, следуя Д. А. Райкову, множеством с линейно независимыми точками, если для любого конечного набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ из равенства $h_1x_1 + h_2x_2 + \ldots + h_nx_n = 0$, где h_j — целые числа, следует $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$.

Действительно, пусть F — безгранично делимый закон, $G(x)$ — функция, фигурирующая в представлении Леви — Хинчина (2). Для каждого натурального n построим функцию $G_n(x)$ так. На каждом из интервалов $(m/n, (m+1)/n)$, $m=0, \pm 1, \ldots \pm n^2$, выберем точки x_{mn} так, чтобы множество $A_n = \{x_{mn}\}_{m=-n^2}^{n^2}$ было множеством с линейно независимыми точками. Обозначим через $G_n(x)$ функцию скачков, разрывы которой лежат в A_n, такую, что $G_n(x_{mn}) = G(x_{mn})$, $m=0, \pm 1, \ldots, \pm n^2$. Пусть F_n — закон, характеристическая функция которого определяется правой частью формулы (2), где роль $G(x)$ играет $G_n(x)$. Тогда F_n удовлетворяет условиям теоремы 1 и при $n \to \infty$ слабо сходится к F.

В [6] Р. Куппенс сообщает, что им доказана следующая теорема.

Пусть F — закон, характеристическая функция которого имеет вид

$$\varphi(t, F) = \exp\left\{i\beta t + \sum_{k=1}^{q} \sum_{s=1}^{r_k} c_{ks}(e^{i\lambda_{ks}t} - 1) + \sum_{j=1}^{\infty} d_j(e^{i\beta_j t} - 1)\right\},$$

где β — действительная, c_{ks} и d_j — неотрицательные, λ_{ks} и β_j — положительные постоянные. Предположим, что выполнены условия:

1) числа $\lambda_{k,s+1}/\lambda_{ks}$ $(s=1, \ldots, r_k-1;\ k=1, \ldots, q)$ и β_{j+1}/β_j $(j=1, 2, \ldots)$ — натуральные, отличные от единицы,

2) числа $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{q1}, \beta_1$ образуют множество с линейно независимыми точками,

3) существует постоянная $K>0$ такая, что

$$d_j = O(\exp\{-K\beta_j^2\}),\ j \to \infty.$$

Тогда $F \in \mathrm{I}_0$.

Метод, который мы применяли для доказательства теоремы 1, позволяет получить более общий результат.

Теорема 2. *Пусть F — закон, характеристическая функция которого имеет вид*

$$\varphi(t, F) = \exp\left\{i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dG(x)\right\},$$

где β — действительная постоянная, а $G(x)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:

а) *$G(x)$ является функцией скачков и множество ее точек разрыва содержится во множестве $\{\lambda_{ks}\}_{k,s=1}^{\infty}$, где числа $\lambda_{k,s+1}/\lambda_{ks}$ $(k, s = 1, 2, \ldots)$ — натуральные, отличные от единицы, а числа $\lambda_{k1}>0$ $(k=1, 2, \ldots)$ образуют множество с линейно независимыми точками,*

б) *существует постоянная $K>0$ такая, что*

$$\int_{x>y} dG(x) = O(\exp\{-Ky^2\}),\ y \to +\infty.$$

Тогда $F \in \mathrm{I}_0$.

Заметим, что если бы удалось отказаться от предположения $\lambda_{k1}>0$ $(k=1, 2, \ldots)$, а утверждение $F \in \mathrm{I}_0$ заменить более сильным $F \in \mathrm{I}_0^{\alpha}$, то мы получили бы теорему, содержащую теорему 1.

Используемый нами метод существенно опирается на теорию почти-периодических функций Бора.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
1 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Л., 1960. [2] И. В. Островский, Вестн. ЛГУ, № 19, 51 (1964). [3] И. В. Островский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 79, 198 (1965). [4] И. В. Островский, Вестн. Харьковск. гос. унив., 32, 51 (1966). [5] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Укр. матем. журн., 19, 104 (1967). [6] R. Cuppens, C. R., 266, 726 (1968). [7] R. Cuppens, Proc. Am. Math. Soc., 21, № 1, 145 (1969). [8] R. Cuppens, Pacif. J. Math., 29, 3, 521 (1969). [9] R. Shimizu, Ann. Inst. Stat., 16, 387 (1964).