Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 519.5 МАТЕМАТИКА

И. И. ПАРОВИЧЕНКО

О СУПРЕМУМАХ СЕМЕЙСТВ H-ЗАМКНУТЫХ РАСШИРЕНИЙ ХАУСДОРФОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 3 II 1970)

1. Ниже, если не оговорено противное, все пространства предполагаются хаусдорфовыми. H-замкнутым расширением X называем тройку $\langle X, i, Y\rangle$, где i — гомеоморфизм X на всюду плотное подмножество Y, а Y H-замкнуто. Между такими расширениями рассматривается обычный квазипорядок $\geqslant$, где $\langle X, i, Y\rangle \geqslant \langle X, i', Y'\rangle$, если существует такое непрерывное отображение γ: $Y \to Y'$, называемое допустимым, что $i' = \gamma \circ i$; тогда $\gamma(Y) = Y'$. Этот квазипорядок обычным способом приводит к частичному порядку между классами эквивалентности расширений X, где в один класс попадают два расширения тогда и только тогда, когда наше γ есть гомеоморфизм. Семейство этих классов есть множество, так как расширения хаусдорфовы. Это множество в дальнейшем условимся обозначать Σ_X.

Основной целью настоящей работы является теорема 1, обобщающая аналогичное предложение Энгелькинга о бикомпактных расширениях тихоновских пространств ([1], стр. 127).

Теорема 1. *В частично упорядоченном множестве Σ_X всех классов эквивалентности H-замкнутых расширений пространства X любое непустое подмножество имеет супремум.*

2. Раз и навсегда из всех вышеуказанных классов выберем по представителю: $\langle X, i_\lambda, i_\lambda X_\lambda\rangle$, где $i_\lambda(X) = X_\lambda$, и пусть $L = \{\lambda\}$ — соответствующее индексное множество. Введем следующие обозначения для $S \subseteq L$:

$$P_S = \prod_{\lambda \in S} i_\lambda X_\lambda, \quad \Delta_S = \{\{x_\lambda\} \mid i_\lambda(x) = x_\lambda, \, x \in X, \, \lambda \in S\},$$

проектирование P_S на $i_\lambda X_\lambda$ обозначим через $\mathrm{pr}_\lambda{}^S$, а его сужение $\mathrm{pr}_\lambda{}^S|_{\Delta_S}$ до Δ_S — через $p_\lambda{}^S$. Тогда $p_\lambda{}^S$ — гомеоморфизм Δ_S на X_λ.

Лемма 1. *При $\lambda \in S \subseteq L$ сужение $\mathrm{pr}_\lambda{}^S$ до замыкания $(P_S)[\Delta_S]$ остается отображением на все $i_\lambda X_\lambda$.*

Доказательство. Нужно показать, что для $y_{\lambda_0} \in i_{\lambda_0} X_{\lambda_0}$ существует такая точка $y \in [\Delta_S]$, у которой координата индекса λ_0 есть y_{λ_0}. Возьмем систему всех окрестностей y_{λ_0} в $i_{\lambda_0} X_{\lambda_0}$, и пусть $\mathfrak{S}_{\lambda_0}$ — система их следов на X_{λ_0}. Пусть $\mathfrak{S}$ — система всех прообразов в X по гомеоморфизму i_{λ_0} множеств системы $\mathfrak{S}_{\lambda_0}$. Тогда (вместе с $\mathfrak{S}_{\lambda_0}$) $\mathfrak{S}$ есть центрированная система открытых множеств X, и дополним $\mathfrak{S}$ в X до некоторой максимальной центрированной системы открытых множеств $\mathfrak{S}^+$. Пусть $\mathfrak{S}_\lambda{}^+$ — образ системы $\mathfrak{S}^+$ по гомеоморфизму i_λ; тогда, в частности, $\mathfrak{S}_{\lambda_0}{}^+ \supseteq \mathfrak{S}_{\lambda_0}$, откуда следует, ввиду центрированности $\mathfrak{S}_{\lambda_0}{}^+$, что в пространстве $i_{\lambda_0} X_{\lambda_0}$ точка y_{λ_0} есть точка прикосновения каждого множества из $\mathfrak{S}_{\lambda_0}{}^+$. Пусть теперь $\lambda \neq \lambda_0$, и для центрированной системы $\{O_\lambda(\Gamma) \mid \Gamma \in \mathfrak{S}_\lambda{}^+\}$ *, пользуясь H-замкнутостью $i_\lambda X_\lambda$, выбираем общую точку прикосновения y_λ. Тогда, ввиду равенства $(i_\lambda X_\lambda)[O_\lambda(\Gamma)] = (i_\lambda X_\lambda)[\Gamma]$, y_λ есть общая точка прикосновения

* $O_\lambda(\Gamma)$ — оператор Шанина в $i_\lambda X_\lambda$ — наибольшее открытое множество в $i_\lambda X_\lambda$, высекающее Γ из X_λ.

множеств из $\mathfrak{S}_\lambda^+$ также и для $\lambda \neq \lambda_0$. Докажем, что $y = \{y_\lambda\} \in P_S$ (где y_{λ_0} — исходная точка из $i_{\lambda_0}X_{\lambda_0}$) есть точка прикосновения Δ_S в P_S. Возьмем базисную окрестность точки y: $O(H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}, \ldots, H_{\lambda_n})$, $y_{\lambda_k} \in H_{\lambda_k}$. Тогда $H_{\lambda_k} \cap \Gamma \supset \Lambda$ при $\Gamma \in \mathfrak{S}^+_{\lambda_k}$, откуда $H_{\lambda_k} \cap \Gamma \cap X_{\lambda_k} \supset \Lambda$, $\Gamma \in \mathfrak{S}_{\lambda_k}$. Но тогда $X_{\lambda_k} \cap H_{\lambda_k}$ открыто в X_{λ_k} и пересекает каждое $\Gamma \in \mathfrak{S}_{\lambda_k}$, и ввиду максимальности $\mathfrak{S}^+_{\lambda_k}$ в X_{λ_k} имеем $X_{\lambda_k} \cap H_{\lambda_k} \in \mathfrak{S}^+_{\lambda_k}$. Пусть $G_k = i^{-1}_{\lambda_k}(X_{\lambda_k} \cap H_{\lambda_k})$; тогда для всех k $G_k \in \mathfrak{S}^+$ и $\bigcap\limits_k G_k = G_0 \in \mathfrak{S}^+$. Берем $x_0 \in G_0$ и точку $\{i_\lambda(x_0)\}$ в Δ_S. Эта точка лежит в $O(H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}, \ldots, H_{\lambda_n}) \cap \Delta_S$, так как $i_{\lambda_k}(x_0) \in i_\lambda(G_0) \subseteq i_{\lambda_k}(G_k) = H_{\lambda_k} \cap X_{\lambda_k} \subseteq H_{\lambda_k}$, что и требовалось доказать.

Л е м м а 2. *Для $S \subseteq L$ замыкание Δ_S в P_S есть H-замкнутое пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сперва частный случай $S = L$. Пусть $\Delta = \Delta_L$, $\Delta^+ = (P_L)[\Delta]$ и $\bar{\Delta}^+$ — некоторое H-замкнутое пространство в котором Δ^+ — всюду плотное подмножество. Тогда для сужения $p_\lambda = \mathrm{pr}_\lambda^L|_\Delta$ композиция $p_\lambda^{-1} \circ i_\lambda$ есть гомеоморфизм X на Δ, не зависящий от λ, который мы обозначим через i. Но тогда $\langle X, i, \bar{\Delta}^+\rangle$ есть H-замкнутое расширение X, и возьмем эквивалентное ему H-замкнутое расширение из выбранных: $\langle X, i_{\lambda_1}, i_{\lambda_1}X_{\lambda_1}\rangle$, $\lambda_1 \in L$, что возможно, так как мы привлекли представителей из в с е х классов эквивалентности! Тогда существует гомеоморфизм γ пространства $\bar{\Delta}^+$ на $i_{\lambda_1}X_{\lambda_1}$ такой, что $\gamma \circ i = i_{\lambda_1}$. Но тогда $\gamma \circ p_{\lambda_1}^{-1} \circ i_{\lambda_1} = i_{\lambda_1}$, и умножая обе части этого равенства справа на $i_{\lambda_1}^{-1} \circ p_{\lambda_1}$, в правой части получим $i_{\lambda_1} \circ i_{\lambda_1}^{-1} \circ p_{\lambda_1} = \mathrm{id}_{X_{\lambda_1}} \circ p_{\lambda_1} = p_{\lambda_1}$ *, а в левой части получим $\gamma \circ p_{\lambda_1}^{-1} \circ i_{\lambda_1} \circ i_{\lambda_1}^{-1} \circ p_{\lambda_1} = \gamma \circ p_{\lambda_1}^{-1} \circ \mathrm{id}_{X_{\lambda_1}} \circ p_{\lambda_1} = \gamma \circ p_{\lambda_1}^{-1} \circ p_{\lambda_1} = \gamma \circ \mathrm{id}_\Delta$, где $\gamma \circ \mathrm{id}_\Delta = \gamma|_\Delta$ — сужение γ до Δ. Но p_{λ_1} есть сужение $\mathrm{pr}_{\lambda_1}^L$ тоже до множества Δ, и так как γ и $\mathrm{pr}_{\lambda_1}^L$ определены и непрерывны на Δ^+, то, совпадая на Δ, они совпадают и на Δ^+, откуда $\gamma(\Delta^+) = \mathrm{pr}_{\lambda_1}^L(\Delta^+)$. Но по лемме 1 $\mathrm{pr}_{\lambda_1}^L(\Delta^+) = i_{\lambda_1}X_{\lambda_1}$, так что $\gamma(\Delta^+) = i_{\lambda_1}X_{\lambda_1}$. Так как $\gamma(\bar{\Delta}^+) = i_{\lambda_1}X_{\lambda_1}$, то ввиду взаимной однозначности γ имеем $\bar{\Delta}^+ \setminus \Delta^+ = \Lambda$ и $\Delta^+ = \bar{\Delta}^+$, т. е. Δ^+ H-замкнуто, и наша лемма доказана для случая $S = L$. Пусть теперь $S \subseteq L$; тогда P_S есть подпроизведение для P_L, и пусть pr_S — проектирование P_L на P_S. Тогда $\mathrm{pr}_S(\Delta_L) = \Delta_S$, $\Delta_S \subseteq \mathrm{pr}_S((P_L)[\Delta_L]) \subseteq (P_S)[\mathrm{pr}_S \Delta_L] = (P_S)[\Delta_S]$, и H-замкнутое пространство $\mathrm{pr}_S((P_L)[\Delta_L])$, содержа Δ_S, лежит в его замыкании в P_S, и, следовательно, с ним совпадает, откуда следует, что $(P_S)[\Delta_S]$ H-замкнуто.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы теперь может быть получено путем доказательства того, что для $\{\langle X, i_\lambda, i_\lambda X_\lambda\rangle \mid \lambda \in S \subseteq L\}$ требуемым супремумом служит класс, содержащий $\langle X, p_\lambda^{-1} \circ i_\lambda, (P_S)[\Delta_S]\rangle$. Доказательство этого факта не сложно, и в аналогичной ситуации (для бикомпактных расширений) содержится у Энгелькинга ([1]), причем требуемый там аналог нашей леммы 2 получается мгновенно, так как замыкание множества в бикомпакте есть шикомпакт!

3. Ниже для расширения $\langle X, i, Y\rangle$ будем предполагать $i = \mathrm{id}_X$, и позволим себе неточность не различать эквивалентные расширения как друг от друга, так и от содержащего их класса эквивалентности. Из способа доказательства теоремы явствует также следующее

П р е д л о ж е н и е. *Если в условиях теоремы непустое подмножество в Σ_X лежит в мультипликативном и наследственном по замкнутым множествам классе Ξ, то и его супремум принадлежит Ξ.*

Л е м м а 3. *Если $\bar{X} = \sup \tilde{X}$, $\tilde{X} \subseteq \Sigma_X$, $\tilde{X} = \{i_\lambda X \mid \lambda \in S\}$, то семейство допустимых отображений γ_λ: $\bar{X} \to i_\lambda X$, $\lambda \in S$, различает точки $\bar{X}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y, y' \in \bar{X}$, $y \neq y'$. Без нарушения общности можно считать $\bar{X} = (P_S)[\Delta_S] \subseteq \Pi\{i_\lambda X \mid \lambda \in S\}$, так что $y = \{y_\lambda\}$, $y' = \{y_\lambda'\}$, а $\gamma_\lambda = \mathrm{pr}_\lambda^S|_{[\Delta]}$. Тогда ввиду $y \neq y'$, существует такое $\lambda_0 \in S$, что $y_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}'$, откуда $\gamma_{\lambda_0}(y) = \mathrm{pr}_{\lambda_0}^S|_{[\Delta_S]}(y) = y_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}' = \gamma_{\lambda_0}(y')$.

---

* id_M — отображение $x \to x$, $x \in M$.

Следствие 1. *Среди всех H-замкнутых расширений Σ_X пространства X существует наибольшее h_1X.*

Расширение X^+ пространства X называется расширением X с нульмерно расположенным наростом (см., например, ([2])), если в X^+ есть открытый базис, границы множеств которого целиком лежат в X.

Следствие 2. *Супремум в $\widetilde{\Sigma}_X$ любого непустого семейства $\widetilde{\Sigma}$ H-замкнутых расширений X с нульмерно расположенным наростом имеет нульмерно расположенный нарост. Если у X имеются бикомпактные расширения с нульмерно распложенным наростом, то среди них есть наибольшее h_2X.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Sigma} = \{i_\lambda X \mid \lambda \in S\}$ — наше семейство, $\widetilde{X} = \sup \widetilde{\Sigma}$; пусть $\mathfrak{G}_\lambda$ — семейство всех открытых множеств в $i_\lambda X$, границы которых лежат в X; γ_λ — допустимое отображение $\widetilde{X}$ на $i_\lambda X$;

$$\mathfrak{G}^* = \{\gamma_\lambda^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{G}_\lambda,\ \lambda \in S\},$$

и наконец, X^* — пространство на множестве $\widetilde{X}$, топология которого задается открытым базисом всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{G}^*$. Тогда X^* есть уплотнение $\widetilde{X}$ и одновременно расширение X. Из леммы 3 легко следует, что X^* хаусдорфово, а тогда $X^* \in \Sigma_X$, и для всех $\lambda \in S$ $i_\lambda X \leqslant X^* \leqslant \widetilde{X}$, откуда $X^* = \widetilde{X}$, и нам достаточно доказать, что X^* имеет нульмерно расположенный нарост. Для этого проверим, что конечные пересечения множеств из $\mathfrak{G}^*$ имеют в X^* границы, целиком лежащие в X. Но так как граница пересечения всегда содержится в объединении границ, то указанное достаточно доказать для множеств из $\mathfrak{G}^*$. Итак, пусть $H = \gamma_\lambda^{-1}(G)$, $G \in \mathfrak{G}_\lambda$ и $x \in (X^* \setminus X) \cap CH$; тогда $\gamma_\lambda(x) = y \,\overline{\in}\, G$ и $y \in i_\lambda X \setminus X$, так как при допустимом отображении нарост расширения переходит на нарост. Ввиду определения $\mathfrak{G}_\lambda$ точка y имеет в $i_\lambda X$ окрестность $U(y)$ такую, что $U(y) \cap G = \Lambda$, и берем $G' \subseteq U(y)$, $y \in G' \in \mathfrak{G}$. Тогда $\gamma_\lambda^{-1}(G') = H' \in \mathfrak{G}^*$, $x \in H'$, $H' \cap H = \Lambda$, что и требовалось. Вторая часть следствия 2 теперь получится при дополнительном использовании нашего предложения.

Следствие 3. *Супремум в Σ_X любого непустого семейства урысоновых H-замкнутых расширений X есть урысоновое H-замкнутое расширение. Если у X имеются урысоновы H-замкнутые расширения, то среди них имеется наибольшее h_3X.*

Доказательство следует из нашего предположения, так как класс урысоновых пространств мультипликативен и наследствен.

4. Ввиду ([3]), стр. 60, наше расширение h_1X совпадает с расширением Катетова τX, и следствие 1 уже известно. Так как расширение Фомина σX (см. там же), согласно теореме Катетова ([4]), может быть охарактеризовано как H-замкнутое расширение X^+, в которое X вложено строго (система множеств вида $O(\Gamma)$ образует базис X^+) и одновременно гиперкомбинаторно (если Γ_1 и Γ_2 открыты в X и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ всюду плотно в X, то $X^+ \setminus X \subseteq O(\Gamma_1) \cup O(\Gamma_2)$, для чего необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого множества Γ в X имело место $\operatorname{Fr} O(\Gamma) \subseteq X$ *), то легко видеть, что σX есть не что иное как наибольшее H-замкнутое расширение X с нульмерно расположенным наростом и может быть получено из $h_1X = \tau X$ как «строгое уплотнение» h_1X, задаваемое на множестве h_1X открытым базисом $\{O(\Gamma)\}$. Что же касается существования бикомпактных расширений с нульмерно расположенным наростом, то согласно теореме Фройденталя — Мориты (([2]), стр. 364) для этого необходимо и достаточно, чтобы в X существовал базис с бикомпактными границами, так что наше расширение h_2X совпадает

* Необходимость этого эквивалента гиперкомбинаторности (сформулированной нами в двойственной форме: через открытые множества) доказана Флаксмайером (([2]), стр. 363); достаточность легко проверить.

с расширением Фройденталя (см. там же). Наконец, вторая половина следствия 3 для случая тихоновского X доказана в ([5]), где $\rho X = h_3X$. Что же касается нетихоновского X, то урысонового H-замкнутого расширения может не существовать даже если X регулярно, о чем свидетельствуют примеры Хьюита ([6]) и Новака ([7]) бесконечных T_3-пространств, на которых всякая действительная непрерывная функция постоянна (см. также построение таких пространств у Херлиха ([8])), так как из существования требуемого расширения следовала бы, согласно теореме Катетова ([9]), возможность его уплотнения на бикомпакт. Но преимущество наших определений h_1X, h_2X и h_3X состоит в том, что мы при этом не используем никаких предварительных конструирований пространств. Впрочем, кроме теоремы 1 для этого нам еще требуется теорема существования H-замкнутого расширения. Но ее простое, не использующее конструкций, доказательство А. Д. Александрова ([10]) как раз удовлетворяет эту потребность. Можно на этом пути также очень быстро прийти для тихоновского пространства к наибольшему его бикомпактному расширению (Стоуна — Чеха), особенно, если определить тихоновское пространство как множество, лежащее в бикомпакте (что сразу обеспечит наличие у него по крайней мере одного бикомпактного расширения: таковым будет его замыкание в бикомпакте).

В заключение заметим, что, к сожалению, авторам работ ([5], [11], [12]) остались неизвестными: работа ([3]), где уже дается характеристика τX в нашем смысле; статья Вайнберга ([13]), где впервые был дан внутренний критерий T_2-замкнутости T_2-пространства (совпадающий с условием $R(i)$ из ([11])) и, наконец, наша статья ([14]), содержащая теорему существования неуплотняемых расширений у канонических (семирегулярных) T_2-пространств: указанные авторы в этой связи ссылаются только на Банашевского ([15]).

Кишиневский государственный университет

Поступило 9 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Engelking, Outline of General Topology, Amsterdam, 1968. [2] J. Flachsmeyer, Math. Zs., 94 (1966). [3] С. Илиадис, С. Фомин, УМН, 21, в. 4 (1966). [4] M. Katětov, Cas. math. fys., 72 (1947). [5] J. Porter, Thomas, Trans. Am. Math. Soc., 138 (1969). [6] E. Hewitt, Ann. Math., 47, № 3 (1946). [7] J. Novák, Cas. math. fys., 73 (1948). [8] H. Herrlich, Math. Zs., 90 (1965). [9] M. Katětov, Cas. math. fys., 69 (1940). [10] А. Д. Александров, ДАН, 37, № 4 (1942). [11] C. Scarborough, A. Stone, Trans. Am. Math. Soc., 124, № 1 (1966). [12] C. Scarborough, Pacific J. Math., 27, № 3 (1968). [13] Н. М. Вайнберг, ДАН, 31, № 6 (1941). [14] И. Паровиченко, ДАН, 138, № 6 (1961). [15] B. Banaschewski, Arch. Math., 12, 22 (1961).