Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 513.88:513.83

МАТЕМАТИКА

Н. И. ГУРАРИЙ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О БАЗИСАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ И БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 23 I 1970)

Целью настоящей заметки является изучение последовательностей коэффициентов разложения элементов равномерно выпуклых или равномерно гладких (определение см., например, в ([5])) банаховых пространств E по произвольным квазинормированным * базисам $\{e_k\}_1^\infty$ в E. Особо рассматривается случай гильбертова пространства.

§ 1. Теорема 1 **. *Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — квазинормированный базис в банаховом пространстве E. Тогда:*

а) *Если E равномерно выпукло, то существуют числа $A>0$ и $r>1$, зависящие от базиса $\{e_k\}_1^\infty$, такие, что в разложении любого элемента $x\in E$, $x=\sum\limits_1^\infty \alpha_k e_k$, имеет место неравенство*

$$\|x\|\leqslant A\Bigl(\sum_1^\infty|\alpha_k|^r\Bigr)^{1/r}. \tag{1}$$

б) *Если E равномерно гладко, то существуют числа $B>0$, $s<\infty$, зависящие от базиса $\{e^k\}_1^\infty$, такие что в разложении любого элемента $x\in E$, $x=\sum\limits_1^\infty \alpha_k e_k$, имеет место неравенство*

$$\|x\|\geqslant B\Bigl(\sum_1^\infty|\alpha_k|^s\Bigr)^{1/s}. \tag{2}$$

Следствие. *Если банахово пространство E является одновременно равномерно выпуклым и равномерно гладким, то существуют числа r, s, $A>0$, $B>0$, $1<r\leqslant s<\infty$, зависящие от базиса $\{e_k\}_1^\infty$, такие, что в разложении любого элемента $x\in E$, $x=\sum\limits_1^\infty \alpha_k e_k$, имеет место неравенство*

$$B\Bigl(\sum|\alpha_k|^s\Bigr)^{1/s}\leqslant\|x\|\leqslant A\Bigl(\sum_1^\infty|\alpha_k|^r\Bigr)^{1/r}. \tag{3}$$

Применим теорему 1 для изучения вопроса об устойчивости базисов в равномерно гладких банаховых пространствах. Предварительно введем следующее

Определение 1. Полная последовательность $\{e_k\}_1^\infty$ в банаховом пространстве E называется вполне устойчивой относительно положительной последовательности $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$, если для любой по-

* Последовательность $\{e_k\}_1^\infty\subset E$ называется базисом в E, если любой элемент $x\in E$ может быть единственным образом представлен в виде $x=\sum\limits_1^\infty\alpha_k e_k$. Базис $\{e_k\}_1^\infty$ называется квазинормированным, если для некоторых $m>0$, $M>0$ выполнено соотношение $m\leqslant\|e_k\|\leqslant M$, $k=1,2,\ldots$.

** Эта теорема получена совместно с В. И. Гурарием.

следовательности $\{g_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию $\|g_k - e_k\| < \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$, линейный оператор T, определенный соотношением $Te_k = g_k$, $k = 1, 2, \ldots$, представим в виде

$$T = I + S, \quad \|S\| < 1.$$

Замечание. В условиях определения 1 T является изоморфизмом E на себя ([6]). Поэтому, если $\{e_k\}_1^\infty$ — базис, то и $\{g_k\}_1^\infty$ является базисом в E, т. е. из вполне устойчивости вытекает обычная устойчивость базиса, а также устойчивость других линейно-топологических свойств последовательности.

Теорема 2. *Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — квазинормированный базис в равномерно гладком банаховом пространстве E. Тогда существуют числа $p > 1$ и $R > 0$, зависящие лишь от базиса $\{e_k\}_1^\infty$, такие, что для любой положительной последовательности $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k^p < R$, $\{e_k\}_1^\infty$ является вполне устойчивой относительно $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$.*

Доказательство. Выберем число p как сопряженное по Гёльдеру к s, где s определено в (2), т. е. $p = s / (s - 1)$. Пусть $\{g_k\}_1^\infty \subset E$ такова, что $\|e_k - g_k\| \leqslant \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Определим на линейной оболочке $L(\{e_k\}_1^\infty)$ последовательности $\{e_k\}_1^\infty$ линейный оператор T равенствами $Te_k = g_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть $T - I = S$; тогда S — также линейный оператор, определенный пока на L. Оценим $\|S\|$, полагая $x = \sum\limits_1^n \alpha_k e_k$, применяя (2) и неравенство Гёльдера

$$\|Sx\| = \|(T - I)x\| = \|Tx - x\| = \left\|\sum_1^n \alpha_k (g_k - e_k)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^n |\alpha_k| \varepsilon_k \leqslant \left(\sum_1^n |\alpha_k|^s\right)^{1/s} \left(\sum_1^n \varepsilon_k^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{\|x\|}{B} R^{1/p}.$$

Будем считать R выбранным так, что $R^{1/p} / B < 1$. Тогда $\|S\| < 1$ и, следовательно, оператор T является изоморфизмом $L(\{e_k\}_1^\infty)$ на $L(\{g_k\}_1^\infty)$. Продолжая ограниченный оператор T на все E по непрерывности, получим линейный оператор $\tilde{T}$, являющийся изоморфизмом E на себя и таким, что

$$\tilde{T}e_k = g_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \tilde{T} = I + S, \quad \|S\| < 1.$$

Теорема доказана.

Насколько нам известно, теорема 2 является новой и для частного случая гильбертова пространства, улучшая условие $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k < R$ в теореме Крейна — Мильмана — Рутмана ([4]).

§ 2. Исходным пунктом результатов этого параграфа является неравенство (3). Базис $\{e_k\}_1^\infty$, для которого имеет место это неравенство, будем называть $\{r, s\}$-базисом. По паре чисел $\{r, s\}$ можно классифицировать базисы в E. Так, класс всех квазинормированных безусловных* базисов в гильбертовом пространстве H по теореме Гельфанда ([3]) совпадает с классом всех $\{2,2\}$-базисов.

Точную верхнюю (нижнюю) грань чисел r (соответственно s), для которых имеет место неравенство (3), будем называть нижней (верхней) степенью базиса $\{e_k\}_1^\infty$ и обозначать соответственно $\rho = \rho(\{e_k\}_1^\infty)$, $\sigma = \sigma(\{e_k\}_1^\infty)$. Если верхняя или нижняя грань при этом не достигается, то будем употреблять круглые скобки, применяя термин (ρ, σ)-базис, а если

---

* Базис $\{e_k\}_1^\infty$ называется безусловным, если он остается базисом при любой перестановке элементов. Базис, не являющийся безусловным, называется условным.

достигается — квадратные скобки. Различные скобки, например $[\rho, \sigma)$ или $(\rho, \sigma]$, понимаются естественным образом. Если $\rho(\{e_k\}_1^\infty) \leqslant r, \sigma(\{e_k\}_1^\infty) \geqslant s$, $1 < r \leqslant s < \infty$, то будем называть $\{e_k\}_1^\infty$ $\langle r, s\rangle$-базисом.

Основным результатом этого параграфа является неулучшаемость неравенства (3) для случая сепарабельного гильбертова пространства H в том смысле, что для произвольных чисел r и s, $1 < r \leqslant s < \infty$, в H существует $\langle r, s\rangle$-базис. Существенную роль при этом играют системы

$$\{|t|^\alpha \cos nt\}_{-\infty}^{\infty}, \quad \{|t|^{-\alpha} \cos nt\}_{-\infty}^{\infty}, \quad 0 < \alpha < 1/2, \tag{4}$$

которые, как это следует из результатов К. И. Бабенко ([2]), являются условными базисами в замыкании своей линейной оболочки в $L_2[-\pi,\pi]$. Попутно получается ряд теорем о коэффициентах разложения по базисам в произвольных банаховых пространствах.

Теорема 3. *Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — квазинормированная последовательность в банаховом пространстве E, удовлетворяющая условиям:*

1. $\left\|\sum_1^n e_k\right\| \geqslant Kn^r \quad (K > 0,\ r > 0), \quad n = 1, 2, \ldots$

2. *Для любых конечных наборов чисел $\{\alpha_i\}_1^n$, $\{\beta_i\}_1^n$ из условия $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, вытекает, что*

$$\left\|\sum_1^n \alpha_k e_k\right\| \leqslant \left\|\sum_1^n \beta_k e_k\right\|.$$

Если $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — *положительная монотонно убывающая последовательность такая, что $\{\alpha_k\}_1^\infty \overline{\in} l_p$,* где $p > 1/r$, *то ряд $\sum_1^\infty \alpha_k e_k$ расходится.*

Теорема 4. *Если квазинормированная последовательность $\{e_k\}_1^\infty$ в банаховом пространстве E для некоторых r и K, $0 < r \leqslant 1$, $0 < K < \infty$, удовлетворяет условию*

$$\left\|\sum_1^n e_k\right\| \leqslant Kn^r, \quad n = 1,2,\ldots,$$

и положительная последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty \downarrow 0$ принадлежит l_p, где $0 < p < 1/r$, то ряд $\sum_1^\infty \alpha_k e_k$ сходится.

С помощью некоторых лемм проверяется, что базисы (4) удовлетворяют условиям теорем 3 и 4 (при соответствующем выборе параметра α). С использованием этих соображений устанавливаются нижеследующие теоремы 5—7.

Теорема 5. *Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — числовая последовательность такая, что $|\alpha_1| \geqslant |\alpha_2| \geqslant \ldots$*

Для того чтобы при любом квазинормированном базисе $\{e_k\}_1^\infty$ в H сходился ряд $\sum_1^\infty \alpha_k e_k$, необходимо и достаточно, чтобы $\{\alpha_k\}_1^\infty \in l_p$ при любом $p > 1$.

Теорема 6. *Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — числовая последовательность такая, что $|\alpha_1| \geqslant |\alpha_2| \geqslant \ldots$ Для того чтобы в H существовал квазинормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$ такой, что ряд $\sum_1^\infty \alpha_k e_k$ сходится, необходимо и достаточно, чтобы $\{\alpha_k\}_1^\infty \in l_p$ для некоторого p, $1 < p < \infty$.*

Теорема 7. *Для произвольных чисел r, s, $1 < r \leqslant s < \infty$, в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует $\langle r, s\rangle$-базис.*

Теорема 7 обобщает результат М. Ш. Альтмана о существовании в сепарабельном гильбертовом пространстве базиса, не являющегося ни гильбертовым, ни бесселевым ([1]). В качестве применения теоремы 7 получим отрицательное решение вопроса о существовании в гильбертовом пространстве H универсального базиса $\{e_k\}_1^\infty$, т. е. такого, что каждый нормированный базис $\{g_i\}_1^\infty$ в H эквивалентен * некоторой подпоследовательности $\{e_{k_i}\}_1^\infty$ базиса $\{e_k\}_1^\infty$.

Теорема 8. *В сепарабельном гильбертовом пространстве H не существует универсального базиса.*

Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина

Поступило 15 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Альтман, ДАН, 69, 483 (1949). [2] К. И. Бабенко, ДАН, 62, 157 (1948). [3] И. М. Гельфанд, Уч. зап. Моск. унив., 148, Математика 4, 224 (1951). [4] М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман, Зап. Харьковск. матем. общ., 16, 14 (1940). [5] J. Lindenstrauss, Michigan Math. J., 10, 241 (1963). [6] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.

* Два базиса $\{e_k\}_1^\infty$ и $\{g_k\}_1^\infty$ соответственно в банаховых пространствах E и G называются эквивалентными, если существует изоморфизм T E на G такой, что $Te_k = g_k$, $k = 1, 2, \ldots$