Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 530.12:531.51 *МЕХАНИКА*

Н. СИБГАТУЛЛИН

ЛИНЕЙНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗВИТИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ВСЕЛЕННОЙ С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 15 V 1970)

Решения уравнений Эйнштейна для гравитирующего идеального газа, допускающие трехпараметрическую группу движений, в последнее время усиленно изучались в связи с проблемой выбора общерелятивистской модели однородной вселенной. Накопленный запас наблюдательных данных не дает возможности сделать категорический выбор космологической модели. Хойл ([1]) высказал идею о возможности существования космологического магнитного поля.

Пусть групповые свойства некоторого решения уравнений Эйнштейна — Максвелла позволяют записать интервал в сопуствующей для газа системе координат в виде *

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(dr^2 + \frac{\sin^2\sqrt{k}r}{k}d\varphi^2\right) - b^2(t)\,dz^2, \tag{1}$$

где $k = 1, 0, -1$ соответственно для закрытой, плоской и открытой моделей (магнитное поле направлено вдоль оси z, его плотность энергии W не зависит от r, φ, z и изменяется со временем по закону $W = \mathrm{const}/a^4$, плотность энергии газа в системе отсчета (1) также зависит только от времени).

Будем считать одно из решений (1) основным космологическим фоном и наложим на него произвольные малые возмущения распределения и скорости вещества, гравитационного и электромагнитного полей. Далее будем считать, что вещество обладает идеальной электропроводностью. Тогда возмущенное электрическое поле будет определяться через 4-скорость и магнитное поле из формулы $F_{ik}u^k = 0$. Среда будет описываться моделью идеального газа. В возмущенном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij} = g_{ij}^{(0)} + h_{ij}$ (где $g_{ij}^{(0)}$ определяется интервалом (1)) синхронную систему отсчета. Тогда $h_{00} = h_{0\alpha} = 0$, так как $g_{0\alpha}^{(0)} = \theta$, $g_{00}^{(0)} = 1$. Из условия $u^iu_i = 1$ для 4-скорости следует $\delta u_0 = 0$. Исключив из системы уравнений Максвелла $\nabla_i\delta F_{kl} + \nabla_k\delta F_{li} + \nabla_l\delta F_{ik} = 0$ электрическое поле, получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta H^3 = -\nabla_\mu\delta u^\mu; \quad \frac{\partial}{\partial t}\delta H^\mu = \delta u^\mu. \tag{2}$$

Здесь и ниже μ, η, ν пробегают значения 1, 2; ковариантное дифференцирование производится с помощью метрики $a^2(t)\left(dr^2 + \frac{\sin^2\sqrt{k}\,r}{k}d\varphi^2\right)$; введены обозначения $\frac{\delta F_{12}}{F_{12}^{(0)}} = \delta H^3$; $\frac{\delta F_{23}}{F_{12}^{(0)}} = \frac{\partial}{\partial z}\delta H^1$; $\frac{\delta F_{31}}{F_{12}^{(0)}} = -\frac{\partial}{\partial z}\delta H^2$; $F_{12}^{(0)}$ —

* Здесь и ниже используется система единиц, в которой скорость света равна единице; свойства космологической модели (1) являются свойствами системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $a(t)$ и $b(t)$.

единственная отличная от нуля компонента магнитного поля для основной модели (1).

Уравнения индукции магнитного поля совместно с системой уравнений Эйнштейна

$$\delta R_k{}^i - {}^1\!/_2 \delta_k{}^i \delta R = \varkappa \delta T_k{}^i \tag{3}$$

образует замкнутую систему уравнений для определения эволюции неоднородностей в модели (1), если соответственно в физике вещества при определенной температуре и плотности задать уравнение состояния идеального газа. Суммарный тензор энергии — импульса идеального газа плюс электромагнитное поле в правой части (3) имеет вид

$$\delta T^{\mu}_{\eta} = -[\delta p + W(2\delta H^3 + h_\perp)]\,\delta^{\mu}_{\eta}; \quad \delta T^{\mu}_{3} = 2W \frac{\partial}{\partial z} \delta u^{\mu};$$

$$\delta T_3{}^3 = -\delta p + W(2\delta H^3 + h_\perp); \quad \delta T_0{}^{\mu} = (p + \varepsilon + 2W)\,\delta u^{\mu};$$

$$\delta T_0{}^3 = (p + \varepsilon)\,\delta u^3; \quad \delta T_0{}^0 = \delta\varepsilon + W(2\delta H^3 + h_\perp).$$

Здесь и ниже $h_\perp = h_1{}^1 + h_2{}^2 \equiv h_\mu{}^\mu$. Можно показать, что система линейных уравнений (2) и (3) распадается на две независимых подсистемы, если произвести разбиение неизвестных $h_\eta{}^\mu$, $h_3{}^\mu$, δu^μ, δH^μ на «потенциальные» и «вихревые» слагаемые:

$$h_\eta{}^\mu = {}^1\!/_2 \delta_\eta{}^\mu h_\perp + (\nabla^\mu \nabla_\eta Q - {}^1\!/_2 \delta_\eta{}^\mu \nabla^\nu \nabla_\nu Q) + \nabla^\mu \tilde{B}_\eta + \nabla_\eta \tilde{B}^\mu$$

(здесь вместо трех неизвестных $h_\eta{}^\mu$ вводится 4 неизвестных $h_\perp$, Q, $\tilde{B}^\mu$ с дополнительным условием $\nabla_1 \tilde{B}^1 + \nabla_2 \tilde{B}^2 = 0$); $h_3^\mu = \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^\mu L + \tilde{L}^\mu)$, где $\nabla_\mu \tilde{L}^\mu = 0$; $\delta u_\eta = \nabla_\eta \varphi + \tilde{u}_\eta$, $\nabla_1 \tilde{u}^1 + \nabla_2 \tilde{u}^2 = 0$; $\delta H^\mu = \nabla^\mu H + \tilde{H}^\mu$, $\nabla_1 \tilde{H}^1 + \nabla_2 \tilde{H}^2 = 0$.

Система уравнений для «вихревых» возмущений $\tilde{L}^\mu$, $\tilde{B}^\mu$, $\tilde{u}^\mu$, $\tilde{H}^\mu$ выделяется из системы уравнений Максвелла — Эйнштейна, за счет чего порядок последней по времени понижается на 4. «Вихревые» возмущения не влияют на эволюцию плотности вещества, исключением $\tilde{L}^\mu$, $\tilde{H}^\mu$, $\tilde{u}^\mu$ можно получить одно уравнение для $(B^\mu)^{\cdot}$ четвертого порядка по времени. Удобно изучать уравнения (2), (3) в сферических волнах по пространству r, φ и в фурье-представлении по оси z (о разложении функций на сферические волны и интеграл Фурье в пространствах Лобачевского см. ([2])). После разбиения системы на «вихревую» и «потенциальную» подсистемы дифференцирования в каждой из подсистем по пространственным координатам будут входить лишь в виде операторов $\partial^2 / \partial z^2$ и $\nabla_\mu \nabla^\mu$, для образов вместо этих операторов надо подставить операторы умножения соответственно на числа $-k^2$, $-w^2 / a^2$, где $-w^2$ — собственное число оператора Лапласа для метрики $dr^2 + \dfrac{\sin^2 \sqrt{k}\, r}{k} d\varphi^2$. Легко показать, что уравнения для «вихревых» возмущений масштабом много меньше «горизонта» (т. е. для $k^2 / b^2 + w^2 / a^2 \equiv \Delta^2 \gg 1 / \sqrt{\varkappa(\varepsilon + W)}$) содержат решение для гравитационной волны, подчиняющейся обычному волновому уравнению $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} (B^\mu)^{\cdot} + \Delta^2 (B^\mu)^{\cdot} = 0$. Эта волна, будучи поперечно поляризованной, имеет всего одну отличную от нуля компоненту в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

С помощью решения гравитационной волны можно понизить порядок подсистемы для «вихревых» добавков и получить уравнение для общерелятивистского альфвеновского возмущения. Однако последнее проявляет волновые свойства только для достаточно малых размеров возмущенной области $\sqrt{\dfrac{2W}{p + \varepsilon + 2W}} \dfrac{k}{b} \gg 1$. Тогда как мелкомасштабные альфвеновские волны развиваются гораздо быстрее изменения со временем невозмущенной модели (1), альфвеновские возмущения с масштабом $\dfrac{2W}{\varepsilon + p + 2W} \dfrac{k^2}{b^2} \leqslant 1$

имеют характерное время эволюции порядка характерного времени изменения масштабных факторов $a(t)$ и $b(t)$. Говорить отдельно о гравитационной и альфвеновской волнах для длин волн больше «горизонта» $1/\sqrt{\varkappa(\varepsilon+W)}$ не имеет смысла, так как для таких масштабов «вихревая» подсистема на альфвеновскую и гравитационную волны не расщепляется.

Система линейных уравнений для «потенциальных» слагаемых в возмущениях δu^{μ}, δH^{μ}, h_{μ}^{3}, h_{μ}^{η}, а также для возмущений $\delta\varepsilon$, δu^{3}, δH^{3}, h_{3}^{3} (назовем ее системой II) допускает некоторое точное решение, соответствующее произволу выбора синхронной системы отсчета в возмущенном римановом пространстве. С помощью этого «фиктивного» решения для возмущений можно понизить порядок системы II до 6 при наличии магнитного поля и до 5 в его отсутствие *.

Если у системы II искать решения с масштабами неоднородности много меньше «горизонта» $1/\sqrt{\varkappa(\varepsilon+W)}$, то из нее в первом приближении по $1/\Delta t$ можно выделить решение, соответствующее гравитационной волне «потенциального» типа **. В синхронной системе отсчета такая гравитационная волна будет продольной, так как у тензора $(h_{\beta}^{\alpha})^{*}$ оказывается отличной от нуля компонента только вдоль направления распространения волны. Используя решение продольной гравитационной волны, можно понизить порядок системы II на 2. После этого мы получаем с точностью до членов порядка $1/\Delta t$ (в коэффициентах) уравнения общерелятивистской магнитной гидродинамики с тяготением (о.м.г.д.т.) в модели вселенной (1). Анализ полученной системы уравнений о.м.г.д.т. приводит к следующим выводам. При наличии космологического магнитного поля минимальные размеры неоднородностей вещества, удерживаемых гравитацией, будут иные, чем в изотропных моделях, где можно пользоваться критерием Джинса. Если вдоль поля критический размер неоднородности имеет джинсовский порядок $\sqrt{\frac{dp}{d\varepsilon}\Big/\varkappa(\varepsilon+W)}$, то поперек магнитного поля критический размер сгущения вещества имеет порядок

$$\sqrt{\frac{dp}{d\varepsilon}+\frac{2W}{p+\varepsilon+2W}\left(1-\frac{dp}{d\varepsilon}\right)\Big/\varkappa(\varepsilon+W)}.$$

При размерах неоднородности вещества меньших этих критических возмущения материи и магнитного поля расплываются в линейных магнитогидродинамических быстрой и медленной волнах за времена, много меньшие характерного времени изменения основной модели (1); для фазовой скорости v_{φ} магнитогидродинамических волн получается релятивистское дисперсионное уравнение

$$v_{\varphi}^{4}-v_{\varphi}^{2}\left[\frac{(p+\varepsilon)\frac{dp}{d\varepsilon}+2W+\frac{dp}{d\varepsilon}\,2W\cos^{2}\theta}{p+\varepsilon+2W}\right]+\frac{2W\frac{dp}{d\varepsilon}\cos^{2}\theta}{p+\varepsilon+2W}=0,$$

где θ — угол между направлением распространения волны и магнитным полем. Развитие сгущения вещества размеров больших этих критических происходит за времена порядка времени развития невозмущенной модели. Характер увеличения плотности вещества в сгущениях размеров больших критических существенно зависит от конфигурации начального возмущения (т. е. от отношения w/k), если размеры последнего меньше «горизонта».

* При отсутствии магнитного поля вихри в частицах сохраняются: $a^{2}b(p+\varepsilon)\,[\nabla_{\alpha}\delta u_{\beta}-\nabla_{\beta}\delta u_{\alpha}]=\mathrm{const}$, где $\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3$. Система II поэтому имеет интеграл, соответствующий сохранению компонент вихря, перпендикулярных к оси симметрии.

** Для размеров возмущений $\gtrsim$ «горизонта» гравитационных волн как самостоятельного объекта в анизотропных моделях не существует, для таких масштабов в общей теории относительности для решения задачи Коши о возмущении плотности необходимо задавать на две произвольные функции больше, чем в ньютоновской теории (см. последнюю часть этой статьи).

В заключение изложим результаты, относящиеся к характеристике развития неоднородности плотности $\delta\varepsilon / \varepsilon$ масштабом большим «горизонта» для пыли и ультрарелятивисткого газа вблизи сингулярных моментов времени. В этом случае все неизвестные величины в системе II можно искать в виде рядов по степеням волновых чисел k, w с коэффициентами, зависящими от времени. Наличие магнитного поля не изменяет в первом приближении по $\varkappa\varepsilon t^2 \ll 1$ законов роста плотности, поэтому ниже 6-я произвольная функция в решении задачи Коши вблизи схлопывания в «блин» для $\delta\varepsilon / \varepsilon$ опущена. Выпишем вид контрастной плотности $\delta\varepsilon / \varepsilon$ при $\varkappa\varepsilon t^2 \ll 1$ вблизи сингулярностей обоих типов. Для «нити» ($a = a_0 t^{2/3}$, $b = b_0 t^{-1/3}$)

$$p = 0: \ \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{w^2}{a_0^2}(C_1 \ln|t| + C_2 t^{-1/3}) + C_3 + \frac{w^2}{a_0^2} C_4 t^{2/3} + \frac{k^2}{b_0^2} C_5 t^{5/3},$$

$$p = \frac{\varepsilon}{3}: \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{w^2}{a_0^2} C_1 \ln|t| + C_2 + \frac{w^2}{a_0^2}(C_3 t^{2/3} + C_4 t^{4/3}) + \frac{k^2}{b_0^2} C_5 t^2.$$

Используя асимптотики $a = a_0(1 + {}^1/_2\varkappa\varepsilon_0 t)$, $b = b_0 t$, $\varepsilon = \varepsilon_0 / t$ для пыли и $a = a_0(1 + {}^3/_4\varkappa\varepsilon_0 t^{2/3})$, $b = b_0 t$, $\varepsilon = \varepsilon_0 t^{-4/3}$ для ультрарелятивистского газа вблизи сингулярности типа «блин» имеем

$$p = 0: \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{w^2}{a_0^2}\frac{k^2}{b_0^2} C_1 \frac{\ln|t|}{t} + \frac{C_2}{t} + C_3 + \frac{w^2}{a_0^2}(C_4 t + C_5 t^2);$$

$$p = \varepsilon/3: \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{w^2}{a_0^2}\frac{\ln|t|}{t^{2/3}} C_1 + \frac{C_2}{t^{2/3}} + C_3 \pm \frac{w^2}{a_0^2} C_4 t^{4/3} + C_5 t^{2/3}.$$

Отсюда видно, что сингулярные схлопывания в «нить» и «блин» всегда неустойчивы, так как при приближении к сингулярному моменту времени $\delta\varepsilon / \varepsilon \to \infty$. Хотя в выражении для $\delta\varepsilon / \varepsilon$ и присутствуют возмущения, ограниченные при прохождении сингулярного момента, однако пользоваться ими для целей объяснения образования первичных гравитационно обособленных объектов нельзя из-за неосуществимости (неустойчивости) сингулярных конфигураций типа «нити» и «блина». Напомним, что в моделях Фридмана возмущения плотности в ультрарелятивистском газе ограничены при прохождении сингулярности и для больших масштабов: $\delta\varepsilon / \varepsilon = C_1\sqrt{|t|} + C_2 t n^2$.

Эти результаты исправляют выводы статьи [3], в которой законы развития крупномасштабных неоднородностей плотности вблизи сингулярностей для пыли и газов $p = \varepsilon / 3$ и $p = \varepsilon$ выписаны с учетом только одного начального возмущения из пяти. Подробную процедуру получения изложенных результатов можно найти в диссертации [4].

Автор искренне благодарит Л. И. Седова и А. Л. Зельманова за плодотворное обсуждение результатов статьи на их семинарах в апреле и октябре 1969 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Hoyle, Conseil de physique solvay, Brössels, 1958. [2] Н. Р. Сибгатуллин, ДАН, 188, 1246 (1969). [3] А. Г. Дорошкевич, Астрофизика, 3, 175 (1967). [4] Н. Р. Сибгатуллин, Кандидатская диссертация, МГУ, 1969.