Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 519.50

МАТЕМАТИКА

И. Д. СТУПИНА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ R-, R^c-ОПЕРАЦИЙ И ПРОЕКТИВНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД НЕСЧЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ МНОЖЕСТВ В СВЯЗИ С ГИПОТЕЗАМИ ВЕТВЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 12 I 1970)

В работе (1) мы рассмотрели некоторые свойства R- и R^c-операций над счетными системами множеств. Аналогичные свойства некоторых операций были рассмотрены в (2). В настоящей заметке рассматриваются аналогичные вопросы для тех же операций над несчетными системами множеств. Используется символика, введенная в заметке (1).

1. Пусть $T = \langle \mathscr{E}, \prec \rangle$ — ветвящаяся таблица, $U \subset \mathscr{E}$, $T^* = \langle U(T), \prec \rangle$. Если $\rho(T^*) = \omega_\lambda$, ω_τ есть финальный характер числа ω_λ и $F = (x_\beta)_{\beta<\omega_\lambda}$ — монотонное рассечение таблицы T', то $(\forall\beta < \omega_\lambda)\cdot[\overline{\overline{(x_{\beta}, \cdot)_{T^*} \cap U}} \geqslant \aleph_\tau]$ и далее либо $\overline{\overline{F \cap U}} = \aleph_\tau$, либо существует дизъюнктивное подмножество $K \subset U$ такое, что $(\forall\beta < \omega_\lambda)[\overline{\overline{(x_{\beta}, \cdot)_{T^*} \cap K}} \geqslant \aleph_\tau]$.

Во всем дальнейшем через $\aleph_\nu$ будем обозначать сильно недостижимое кардинальное числа. Если $\overline{\overline{E}} = p$, то E назовем p-множеством. В работе используются гипотезы:

(α_1) Всякая ветвящаяся таблица T ранга ω_ν такая, что $(\forall\alpha < \omega_\nu)\cdot[\overline{\overline{T_\alpha}} < \aleph_\nu]$, достигает своего ранга.

(α_2) Если в ветвящейся таблице $T = \langle \mathscr{E}, \prec \rangle$ ранга ω_ν мощность всякого дизъюнктивного подмножества $U \subset \mathscr{E}$ меньше $\aleph_\nu$, то таблица T достигает своего ранга (3).

Эти гипотезы соответственно эквивалентны следующим:

(β_1) Всякая ветвящаяся таблица T ранга ω_ν либо достигает своего ранга, либо имеет $\aleph_\nu$-узел.

(β_2) Всякая ветвящаяся таблица $T = \langle \mathscr{E}, \prec \rangle$ ранга ω_ν либо достигает своего ранга, либо удовлетворяет условию: существует дизъюнктивное $\aleph_\nu$-подмножество $U \subset \mathscr{E}$, не удовлетворяющее условию i_ν.

Очевидно, $(\alpha_1) \Rightarrow (\alpha_2)$. Теоремы, доказанные с помощью гипотез (α_1) и (α_2), будем отмечать (*) и (**) соответственно.

(*) Для всякого $\aleph_\nu$-множества $U \subset \mathscr{E}$ в таблице $T = \langle \mathscr{E}, \prec \rangle$ ранга $\leqslant \omega_\nu$ справедливо I_ν или II_ν.

2. Под Π^τ-произведением дискретных пространств $\{X_\alpha\colon \alpha < \omega_\tau\}$, обозначаемым нами через $\Pi^\tau X_\alpha$ и называемым обобщенным бэровским пространством, будем понимать пространство на абстрактном произведении $\prod\limits_{\alpha<\omega_\tau} X_\alpha$, открыто-замкнутый базис B^τ которого задается совокупностью обобщенных бэровских интервалов $\delta_{(i_\beta)\,\beta<\alpha}$, где $\delta_{(i_\beta)\,\beta<\alpha} = \{(j_\beta)_{\beta<\omega_\tau} \in \prod\limits_{\beta<\omega_\tau} X_\beta\colon (\forall\beta < \alpha)\,[j_\beta = i_\beta]\}$. Будем считать $\delta_{(i_\beta)_{\beta<0}} = \prod\limits_{\alpha<\omega_\tau} X_\alpha$. Если $(\forall\alpha < \omega_\tau)$ $[X_\alpha = J]$ & $\overline{\overline{J}} \neq \aleph_\tau$, то пространство $\Pi^\tau X_\alpha$ обозначается J^{ω_τ}. Положим $\mathrm{T}^\tau = \langle B^\tau \prec \rangle$, где в качестве отношения $\prec$ берется отношение $\supset$ строгого включения.

(*) Для того чтобы замкнутое множество $E \subseteq \subseteq \Pi^\tau X_\alpha$ не было $\aleph_\nu$-бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело дизъюнктивное

$\aleph_\nu$-покрытие $S \subset B^\nu$, удовлетворяющее условию II_ν, т. е. чтобы ветвящаяся таблица $\langle S(T^\nu), < \rangle$ имела $\aleph_\nu$-узел.

Примечание. И. И. Паровиченко (4) доказал, что гипотеза (α_1) эквивалентна утверждению об $\aleph_\nu$-бикомпактности T^ν-произведения дискретных пространств $\{X_\alpha: \alpha < \omega_\nu\}$, где $(\forall\alpha < \omega_\nu)[\overline{\overline{X}}_\alpha \leqslant \aleph_\nu]$. Так как классы открытых множеств в этом пространстве и пространстве $\Pi^\nu X_\alpha$ совпадают, то гипотеза (α_1) эквивалентна утверждению об $\aleph_\nu$- бикомпактности пространства $\Pi^\nu X_\alpha$, когда $(\forall\alpha < \omega_\nu)[\overline{\overline{X}}_\alpha < \aleph_\nu]$.

3. Множество всех кортежей вида $(i_\beta)_{\beta<\alpha}$, соответствующих всем точкам $x \in J^{\omega_\nu}$, обозначим W. Множество $U \subset W$ назовем W-базой. Если не сделано специальных оговорок, то R- и R^c-операции рассматриваются с полной глубиной цепей $\mathfrak{v} = \omega_\nu$. Жесткие W-базы операций $R_{\mathfrak{M}}$, $R_{\mathfrak{M}}{}^c$, $R_N{}^\alpha$, $R_N{}^{\alpha c}$, R^α, $R^{\alpha c}$, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$ (5, 6) обозначим $\theta_{\mathfrak{M}}$, $\theta_{\mathfrak{M}}{}^c$, $\theta_N{}^\alpha$, $\theta_N{}^{\alpha c}$, θ^α, $\theta^{\alpha c}$ соответственно. Через χ_α [$\chi_\alpha{}^c$] обозначим жесткую базу проективной $A_\alpha[CA_\alpha]$-операции, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$.

4. Скажем, что жесткая база N допускает V-преобразование, если для всякого $J' \subset J$ при условии $N^{J'} \neq \varnothing$ существует множество $[J']$ такое, что, положив для произвольной системы множеств (E_i) $\bar{E}_i = E_i$, если $i \notin [J']$, и $\bar{E}_i = \varnothing$, если $i \in [J']$, получим $\Phi_{N^{J'}}(E_i) = \Phi_N(\bar{E}_i)$.

Нами доказано: если N и N^c — жесткие базы взаимно дополнительных операций, то каждая из них допускает V-преобразование *. Поэтому базы χ_α, $\chi_\alpha{}^c$, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, а также базы $\theta_N{}^\alpha$, $\theta_N{}^{\alpha c}$, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, при условии, что N и N^c — жесткие базы, допускают V-преобразование.

Жесткая база N называется $\aleph_\tau$-правильной (8) для класса множеств $\mathscr{K}$, если $(\forall J' \subset J)[\Phi_{N^{J'}}(\mathscr{K}) \subset \Phi_N(\mathscr{K})]$ и класс множества $\Phi_N(\mathscr{K})$ инвариантен относительно операций $\bigcup\limits_{\aleph_\tau}$, $\bigcap\limits_{\aleph_\tau}$. Свойство H множеств цепей жесткой базы N называется N-регулярным (8) для класса множеств $\mathscr{K}$, если операции Φ_{HN}, $\Phi_{(HN)^c}$ слабее операции Φ_N относительно класса множеств $\mathscr{K}$.

Каждая из баз χ_α, $\chi_\alpha{}^c$, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, а также каждая из баз $\theta_N{}^\alpha$, $\theta_N{}^{\alpha c}$, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$ при выполнении условий: 1°. N и N^c — жесткие базы; 2°. Операция Φ_N сильнее операции $\bigcup\limits_{\aleph_\nu}$, является $\aleph_\nu$-правильной для класса множеств $\mathscr{K} \ni \varnothing, \Xi$, где Ξ — основное пространство.

Отсюда и в силу теоремы З. И. Козловой ((8), теорема 1) для класса множеств $\mathscr{K} \ni \varnothing, \Xi$ для любого $p \leqslant \aleph_0$ свойство H_τ является M-регулярным, если M есть база χ_α, $\chi_\alpha{}^c$, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, а также база $\theta_N{}^\alpha$, $\theta_N{}^{\alpha c}$, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$ в случае, когда выполняются условия 1° и 2°, и, следовательно, когда M есть база θ^α, $\theta^{\alpha c}$, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$.

5. Для базы N определим $\Delta\Sigma$-операцию Q_N над двумя системами множеств (E_u), (e_v), положив

$$\underset{u,\,v}{Q_N}(E_u, e_v) = \bigcup_{\xi \in N} \bigcup_{\xi' \subset \xi,\ \overline{\overline{\xi'}} = \aleph_\nu} \left(\bigcap_{u \in \xi} E_u \cap \bigcap_{v \in \xi'} e_v \right).$$

(*) Для любого $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$ операция Q_{θ^α} [$Q_{\theta^{\alpha c}}$] слабее операции Φ_{θ^α} [$\Phi_{\theta^{\alpha c}}$] относительно класса множеств $\mathscr{K} \ni \varnothing, \Xi$.

6. Пусть $\mathfrak{M} = (N_a)_{a \in W}$, $\mathfrak{M}^c = (N_a{}^c)_{a \in W}$ — таблицы жестких баз. Для операций $\Phi_{\theta_{\mathfrak{M}}}\Phi_{\theta_{\mathfrak{M}}^c}$, введем условия сгущения. Скажем, что набор кортежей η_x удовлетворяет условию $a_1{}^\nu$ [$a_3{}^\nu$], если в ветвящейся таблице $\langle \eta_x(T_W), < \rangle$ имеется узел $(\{ai\})_{i \in J'}$, из которого можно образовать $> \aleph_\nu$ [$\geqslant \aleph_\nu$] R- (R^c-) покрытие кортежа a; $a_2{}^\nu$, если в наборе $\eta_x(T_W)$ имеется кортеж и такое его R- (R^c-) покрытие, в котором $\aleph_\nu$ кортежей обладают свойством двойственности; $a_4{}^\nu$, если таблица $\langle \mu_x, < \rangle$ достигает своего ранга ω_ν; $a_7{}^\nu$, если набор μ_x включает дизъюнктивное $\aleph_\nu$-подмножество кортежей.

---

* А. Д. Тайманов (7) привел пример δS-операции с жесткой базой, у которой дополнительная δS-операция жесткой базы не имеет.

Тогда для операций $\Phi_{\theta_{\mathfrak{M}}}$, $\Phi_{\theta^c_{\mathfrak{M}}}$ справедливо:

1) при $v < \omega_\nu$: $\overline{\overline{M}}_x > \aleph_\nu \Leftrightarrow a_1^\nu \vee a_2^\nu$, $\overline{\overline{M}}_x \geqslant \aleph_\nu \Leftrightarrow a_2^\nu \vee a_3^\nu$, $\overline{\overline{M}}_x = \aleph_\nu \Leftrightarrow \rceil - (a_1^\nu \vee a_2^\nu) \,\&\, a_3^\nu$;

2) (**) $\overline{M}_x \geqslant \aleph_\nu \,\&\, \rceil a_3^\nu \,\&\, \rceil a_7^\nu \Rightarrow a_4^\nu$;

3) (**). $\overline{\overline{M}}_x \geqslant \aleph_\nu \Leftrightarrow a_3^\nu \vee a_4^\nu \vee a_7^\nu$.

Для операции $\Phi_{\theta^c_{\mathfrak{M}}}$ справедливо:

4) (*) $\overline{\overline{M}}_x > \aleph_\nu \Leftrightarrow a_1^\nu \vee a_2^\nu$;

5) (*) $\overline{\overline{M}}_x = \aleph_\nu \Leftrightarrow \rceil (a_1^\nu \vee a_2^\nu) \,\&\, a_3^\nu$.

7. Пусть W-база U совпадает с базой $\theta_{\mathfrak{M}}$ или $\theta^c_{\mathfrak{M}}$. Для $k = 2, 4, 7$ положим $\Phi_{Ha_k^\nu U}(E_\alpha) = \{x \in \Phi_U(E_\alpha)$: набор η_x удовлетворяет условию $a_k^\nu\}$.

(*) Для класса множеств $\mathscr{K} \ni \phi, \Xi$ операции $\Phi_{H_{a_2}\theta^\alpha}$, $\Phi_{H_{a_2}\theta^{\alpha c}}$, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, слабее операций Φ_{θ^α}, $\Phi_{\theta^{\alpha c}}$ соответственно.

(**) При выполнении условий 1^0 и 2^0 операции $\Phi_{Ha_4\theta^\alpha_N}$, $\Phi_{Ha_7\theta^\alpha_N}$, $2 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, слабее операции $\Phi_{\theta^\alpha_N}$, а операции $\Phi_{Ha_4\theta^{\alpha c}_N}$, $\Phi_{Ha_7\theta^{\alpha c}_N}$, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, слабее операции $\Phi_{\theta^{\alpha c}_N}$.

(**) При выполнении условий 1^0 и 2^0 свойство $H_{\aleph_\nu}$ является M-регулярным, если база M совпадает с базой θ^α_N, $2 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, $\theta^{\alpha c}_N$, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, в частности, с базой θ^α при $2 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, $\theta^{\alpha c}$ при $1 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$

(*) Свойство $H_{\hat{\aleph}_\nu}$ является $\theta^{\alpha c}$-регулярным для класса множеств $\mathscr{K} \ni \phi, \Xi$.

8. Пусть $J = \{\alpha: \alpha < \omega_\nu\}$. Если каждую цепь ξ жесткой базы M упорядочить в порядке возрастания ее элементов, то получим жесткую приведенную базу $\breve{M}$. Пусть $\breve{M} \subset J^{\omega_\nu}$. Положим $\Phi_{H_c\breve{M}}(E_i) = \{x \in \Phi_M(E_i)$: замыкание множества $\breve{M}_x$, не является $\aleph_\nu$-бикомпактным$\}$, где $\breve{M}_x$ — множество всех цепей базы $\breve{M}$, ядрам которых принадлежит точка x. Пусть $q = (i_\beta)_{\beta<\alpha} \in W$ и $(\beta' < \beta'') \Rightarrow (i_{\beta'} < i_{\beta''})$. Для системы множеств (E_i) положим $E_i^q = \phi$, если $(\forall \beta < \alpha)(i \neq i_\beta) \& (\exists \beta_0)[i < i_\beta]$, и $E_i^q = E_i$ во всех остальных случаях. Пусть $\mathscr{E}_q = \underset{i}{\Phi_M}(E_i^q)$, $S'_\alpha = \bigcup\limits_{p \in W} \mathscr{E}_{qp}$.

Тогда

(*) $\Phi_{H_c\breve{M}}(E_i) = \bigcup\limits_{q \in W} \overline{\lim_{i}}^{\aleph_\nu} S_{q^i}$.

(*) Если жесткая база M является $\aleph_\nu$-правильной для класса множеств $\mathscr{K} \ni \phi$, то свойство H_c является M-регулярным.

(*) Свойство H_c является M-регулярным для класса множеств $\mathscr{K} \ni \phi, \Xi$, если база M совпадает с базой χ_α, χ_α^c, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, а также при выполнении условий 1^0 и 2^0 с базой θ_N^α, $\theta_N^{\alpha c}$, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$, в частности, с базой θ^α, $\theta^{\alpha c}$, $0 \leqslant \alpha < \omega_{\nu+1}$.

Волгоградский государственный педагогический институт им. А. С. Серафимовича

Поступило 30 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Д. Ступина, ДАН, 188, № 5, 1010 (1969). [2] И. Д. Ступина, ДАН, 117, № 2, 188 (1957). [3] G. Kurepa, Publ. math. de l'Univ. de Belgrade, 4, 1 (1935). [4] И. И. Паровиченко, ДАН, 174, № 1, 30 (1967). [5] А. А. Ляпунов, Алгебра и логика, семинар, 2, в. 2, 47 (1963). [6] З. И. Козлова, Уч. зап. Волгоградск. пед. инст., Математика, в. 23 (1969). [7] А. Д. Тайманов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 443 (1950). [8] З. И. Козлова, ДАН, 188, № 5, 1001 (1969).