

А. С. ВОЛЬМИР, Л. Н. СМЕТАНИНА

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ
ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 4 I 1970)

За последние годы был опубликован ряд работ, посвященных исследованию поведения замкнутых цилиндрических изотропных оболочек при быстром нагружении осевой силой и поперечным давлением. Обзор этих работ приведен в (1).

В данной статье исследуется выпучивание цилиндрической стеклопластиковой оболочки, трактуемой как ортотропная, при действии собственно ударной нагрузки. Принимается, что оболочка имеет начальные непрявильности в форме срединной поверхности.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку массы M_1 , закрепленную одним из торцов, в предположении, что по свободному торцу производится осевой удар грузом массы M_2 . Опыты, проведенные авторами статьи, показали, что характер выпучивания оболочки примерно такой же, как и при статической потере устойчивости в большом. Поэтому в основу задачи положим динамические дифференциальные уравнения нелинейной теории оболочек. Далее, допустим, что деформации, вызванные ударом, распределяются по длине оболочки так же, как и в случае прямого упругого стержня массы M_1 . Интегрируя соответствующее волновое уравнение для продольного перемещения u методом характеристик, определяем закон изменения во времени инерционных сжимающих напряжений для различных поперечных сечений оболочки. Затем считаем, что этот закон изменения сжимающих напряжений распространяется на некоторую узкую зону вблизи сечения. Для этой зоны составляем динамические уравнения нелинейной теории оболочек и интегрируем их, учитывая найденные ранее инерционные составляющие. Предполагаем при этом, что начальные и развивающиеся вмятины имеют ромбовидный характер. В результате интегрирования динамических уравнений определим зависимость прогиба от времени. Полагаем, что оболочка теряет устойчивость при ударе, если происходит прощелкивание ее к новой равновесной форме.

Будем исходить из известных нелинейных уравнений для ортотропных оболочек

$$\frac{1}{h} \nabla_D^4 (w - w_0) = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \Phi_{,xx} - \frac{\gamma}{g} w_{,tt}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_D^4 &= D_1 \partial^4 / \partial x^4 + 2D_3 \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + D_2 \partial^4 / \partial y^4, \\ L(w, \Phi) &= w_{,xx} \Phi_{,yy} + w_{,yy} \Phi_{,xx} - 2w_{,xy} \Phi_{,xy}; \\ \delta_2 \Phi_{,xxxx} + 2\delta_3 \Phi_{,xxyy} + \delta_1 \Phi_{,yyyy} &= -w_{,xx} w_{,yy} + \\ &+ w_{,xy}^2 + w_{0,xx} w_{0,yy} - w_{0,xy}^2 - \frac{1}{R} (w - w_0)_{,xx}, \end{aligned} \quad (2)$$

где Φ — функция напряжений в срединной поверхности; w и w_0 — полный и начальный прогибы; t — время; h — толщина оболочки; R — радиус кривизны. Координаты x и y отсчитываются по образующей оболочки и

вдоль дуги. Функции w и w_0 аппроксимируем с помощью выражений

$$w = f(\sin \alpha x \cdot \sin \beta y + \psi \sin^2 \alpha x \cdot \sin^2 \beta y), \quad (3)$$

$$w_0 = f_0(\sin \alpha x \cdot \sin \beta y + \psi \sin^2 \alpha x \cdot \sin^2 \beta y). \quad (4)$$

Здесь $\alpha = m\pi/L$; $\beta = n/R$; m — число полуволн вдоль образующей оболочки; n — число волн по окружности оболочки. Подставляя (3) и (4) в (2), находим функцию Φ ; в выражение для Φ вводим член $(-py^2/2)$. По поводу безразмерных параметров и обозначений, используемых в работе, см. (2, 3).

Применяя далее к уравнению (1) обычную процедуру Бубнова — Галеркина, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - S_3 \left\{ \left[\frac{\hat{p}}{A_1} - \frac{A_2}{A_1} (\zeta^2 - \zeta_0^2) \right] \zeta - (\zeta - \zeta_0) - \right. \\ \left. - \frac{A_3}{A_1} (\zeta^3 - \zeta_0^3) \psi^2 - \frac{A_4}{A_1} (\zeta^2 - \zeta_0 \zeta) \psi - \frac{A_5}{A_1} (\zeta^2 - \zeta_0^2) \psi \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$S_3 = A_1^3 \eta \xi^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right) \left(\frac{1}{v_0} \right)^2 \frac{g}{\gamma} \sqrt{E_1 E_2};$$

$\hat{p} = \frac{p}{\sqrt{E_1 E_2}} \frac{R}{h}$; A_1 — параметр верхнего критического напряжения при статическом нагружении, определяемый формулой:

$$A_1 = \lambda_3 \eta \vartheta / \xi^2 + \Delta \xi^2 \lambda_2 / \eta, \quad \Delta = \sqrt{E_2 / E_1}.$$

Выражение для ψ принимаем по решению статической задачи:

$$\begin{aligned} B'_3 \xi (\zeta^2 - \zeta_0^2) \psi^3 - B'_4 (\zeta^2 - \zeta^2) \psi^2 - B'_5 (\zeta - \zeta_0) \zeta \psi^2 - \hat{p} \zeta \psi + \\ + B'_6 \zeta (\zeta^2 - \zeta_0^2) \psi + B'_7 (\zeta - \zeta_0) \psi - B_1 \zeta (\zeta - \zeta_0) - B'_2 (\zeta^2 - \zeta_0^2) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) коэффициенты $A_2 \div A_5$ и $B_1' \div B_7'$ — величины, зависящие от параметров волнообразования и механических характеристик стеклопластиков.

Интегрирование уравнений (5) и (6) было выполнено по методу Рунге — Кутты с помощью ЭЦВМ БЭСМ-2М при начальных условиях

$$\zeta = \zeta_0, \quad d\zeta/d\hat{t} = 0 \quad \text{при} \quad \hat{t} = 0. \quad (7)$$

Для исследования влияния степени анизотропии оболочек на характер их выпучивания принималось $E_1 E_2 = \text{const}$. Далее варьировалось отношение E_1 / E_2 . В вычислениях оно принималось равным 1; 2; 5. Кроме того, для оболочек из материала П2-7С и АГ-4С принимались другие значения E_1 / E_2 .

На рис. 1 приведены кривые, отражающие зависимость $\zeta_1(\hat{t})$ в случае $E_1 / E_2 = 5$; $M_2 / M_1 = 30$; $\xi = 2$ для оболочки с параметрами $\zeta_0 = 0,001$; $L / R = 2,2$; $h / R = 1/250$ и различных начальных скоростях удара ($x = L/2$). Из кривых, построенных для разных чисел волн n , выбрана кривая, отвечающая наиболее раннему выпучиванию ($n = 12$ на рис. 1). Отношение начальной скорости удара к скорости распространения упругих волн в материале оболочки v_0 / V принималось равным 0,001; 0,015 и 0,020. Аналогичные кривые получены для случая бесконечно большой массы ударяющего груза. Кроме того, варьировался параметр ξ , определяющий форму вмятины; вычисления велись для оболочек с различными геометрическими параметрами.

Приведем результаты экспериментального исследования поведения стеклопластиковых цилиндрических оболочек при осевом ударе. Оболочки были изготовлены из материала П2-7С и АГ-40 путем намотки продольных и поперечных слоев стеклотенты. Было испытано 35 образцов. Схема установки и методика проведения испытаний изложены в работе (3). На рис. 2 сопоставлены экспериментальные значения коэффициента k_d с теоретическими результатами (об определении k_d см. работу (1), стр. 768). Кривые на рисунке отображают зависимости динамического коэффициента k_d от начальной скорости удара для оболочек с относительными размерами $L/R = 3,5$, $R/h = 7,2$ при отношении $M_2/M_1 = 30$, $E_1/E_2 = 1$ и 2. Кружками здесь отмечены значения динамического коэффициента, полученные из эксперимента. Как видно из графика, теоретические и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются между собой. Отсюда можно заключить, что приведенное решение задачи о выпучивании стеклопластиковой оболочки при осевом ударе является приемлемым, по крайней мере, в первом приближении.

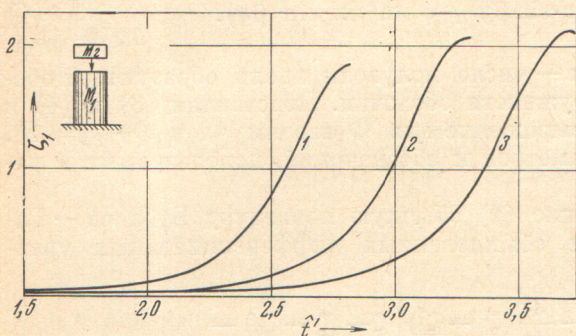


Рис. 1. Зависимость $\zeta_1(t)$ при $v_0 = 0,001 v$, $n = 12$ (1), $v_0 = 0,015 v$, $n = 13$ (2) и $v_0 = 0,020 v$, $n = 14$ (3)

ными размерами $L/R = 3,5$, $R/h = 7,2$ при отношении $M_2/M_1 = 30$, $E_1/E_2 = 1$ и 2. Кружками здесь отмечены значения динамического коэффициента, полученные из эксперимента. Как видно из графика, теоретические и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются между собой.

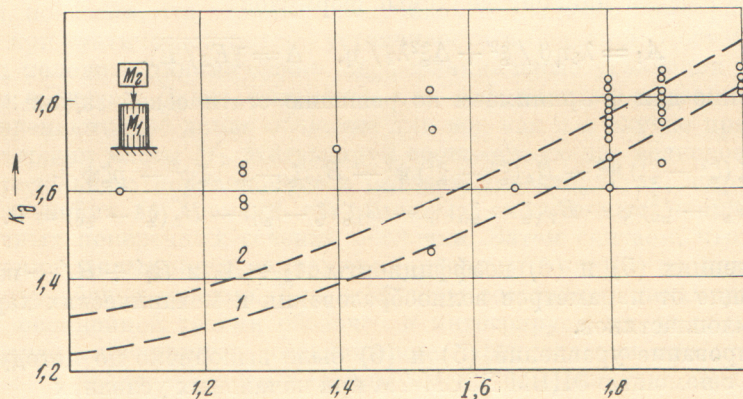


Рис. 2. Зависимость k_d от начальной скорости удара $((v_0/V) \cdot 10^{-3})$ при $E_1/E_2 = 1$ (1) и $E_1/E_2 = 2$ (2)

Военно-воздушная инженерная академия
им. Н. Е. Жуковского
Москва

Поступило
3 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, «Наука», 1967.
² А. С. Вольмир, Л. Н. Сметанина, Механика полимеров, № 1 (1968).
³ В. Л. Агамиров, Л. Н. Сметанина, Тезисы докл. 5-й Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, «Наука», 1965.