Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 517.512.6 *МАТЕМАТИКА*

М. Ф. ТИМАН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ L_p-КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 I 1970)

Пусть L_p — класс измеримых периодических периода 2π функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx < \infty$. Для каждой функции $f(x)$ с рядом Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

рассмотрим величину

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{\alpha_k, \beta_k} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right|^p dx \right\}^{1/p}$$

и при всяком целом $k \geqslant 0$ величину

$$\omega_k(f; h)_{L_p} = \sup_{|t| \leqslant h} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu t) \right\|_{L_p} \quad (k \geqslant 1),$$

$$\omega_0(f; h)_{L_p} = \| f(x) \|_{L_p} = \left\{ \int\limits_0^{2\pi} | f(x) |^p\, dx \right\}^{1/p}.$$

Известна следующая теорема Харди — Литтльвуда — Пэли. Пусть при $2 < p < \infty$ сходится ряд $N_p(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p)\, n^{p-2}$. Тогда

$$\| f(x) \|_{L_p}^p \leqslant M_p N_p(f). \tag{2}$$

Благодаря тому что всегда $|a_n| + |b_n| \leqslant E_{n-1}(f)_{L_1} \leqslant C_k \omega_k(f;\ 1/n)_{L_1}$, из неравенств (2) непосредственно следует, что при $2 < p < \infty$

$$\| f(x) \|_{L_p} \leqslant C_p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^p(f)_{L_1} n^{p-2} \right\}^{1/p} \leqslant C_{p,k} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_k^p \left(f; \frac{1}{n} \right)_{L_1} n^{p-2} \right\}^{1/p}. \tag{3}$$

Из той же теоремы Харди — Литтльвуда — Пэли, сформулированной в виде неравенства

$$\| f(x) \|_{L_p}^p \leqslant C_p^p \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^* + b_n^*)^p\, n^{p-2} \quad (2 < p < \infty), \tag{4}$$

где $\{a_n^* + b_n^*\}$ обозначает последовательность чисел, получающуюся из последовательности $\rho_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ после расположения ее в убывающем порядке, следует при любом r $(1 < r \leqslant 2)$ неравенство вида

$$\| f(x) \|_{L_p}^p \leqslant C_{p,r}^p \sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^p(f)_{L_r} n^{p/r-2}. \tag{5}$$

В самом деле, так как $1 < r \leqslant 2$, то, благодаря теореме Харди — Литтльвуда — Пэли (см. [2], стр. 185) имеем

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^* + b_n^*)^r n^{r-2}\right\}^{1/r} \leqslant C_r \|f(x)\|_{L_r}.$$

Применяя это неравенство к разности $f(x) - S_{n-1}(f; x)$, где $S_{n-1}(f; x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда (1), получаем

$$\left\{\sum_{\nu=n}^{2n} (a_\nu^* + b_\nu^*)^r \nu^{r-2}\right\}^{1/r} \leqslant C_r E_{n-1}(f)_{L_r}.$$

В силу монотонности $\{a_n^* + b_n^*\}$ отсюда следует, что

$$a_{2n}^* + b_{2n}^* \leqslant C_r E_{n-1}(f)_{L_r} n^{1/r-1}. \tag{6}$$

Это неравенство вместе с (4) дает (5) при $p > 2$.

В случае же, когда $1 < p \leqslant 2$, теорема вложения из L_r в L_p типа неравенств (3) и (5), как отмечалось автором ранее (см. [10], теоремы 1.3.9, 1.4.11, $k = 0$) могут быть получены с помощью известной теоремы Литтльвуда — Пэли (см. [2], стр. 348).

В силу этой теоремы (см. [9], стр. 128), при всяком p $(1 < p \leqslant 2)$

$$\|f(x)\|_{L_p} \leqslant M_p \left\{\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} A_\nu(x)\right\|_{L_p}^p\right\}^{1/p}. \tag{7}$$

Применяя здесь неравенство С. М. Никольского (см. [1], стр. 256), имеем

$$\|f(x)\|_{L_p} \leqslant 2M_p \left\{\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} A_\nu(x)\right\|_{L_r}^p 2^{(m+1)(1/r-1/p)p}\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant M_{p,r} \left\{\sum_{m=0}^{\infty} E_{2^m-1}^p(f)_{L_r} 2^{m(p/r-1)}\right\}^{1/p} \leqslant M'_{p,r} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^p(f)_{L_r} n^{p/r-2}\right\}^{1/p}. \tag{8}$$

Если $r = 1$, то, выбирая произвольное γ так, чтобы $1 < \gamma < p$, в силу (8) имеем оценку

$$\|f(x)\|_{L_p} \leqslant M_p \left\{\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^p(f)_{L_\gamma} n^{p/\gamma-2}\right\}^{1/p},$$

после применения к которой неравенства Конюшкова — Стечкина (см. [3], стр. 56)

$$E_n(f)_{L_\gamma} \leqslant M\left\{E_n(f)_{L_1} n^{1-1/\gamma} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-1/\gamma} E_\nu(f)_{L_1}\right\}$$

и известного (см. [4], стр. 308) числового неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(d_n + d_{n+1} + \ldots)^p \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(nd_n)^p \quad (p < 1,\ c < 1,\ d_n \geqslant 0)$$

получаем

$$\|f(x)\|_{L_p}^p \leqslant M_p'^p \left\{\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^p(f)_{L_1} n^{p-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{p/\gamma-2}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty} E_\nu(f)_{L_1} \nu^{-1/\gamma}\right)^p\right\} \leqslant$$

$$\leqslant M_p''^p \sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^p(f)_{L_1} n^{p-2}.$$

Примеры функций

$$f_0(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(r) \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} \cos \nu x, \quad g_0(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(r) \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1} \sin \nu x,$$

$$\delta_m(r) = [2^{-m(r-1)}(\alpha^r_{2^m} - \alpha^r_{2^{m+1}})]^{1/r}, \quad \alpha_n \downarrow 0, \quad 1 < r < \infty,$$

для которых $E_n(f_0)_{L_r} \leqslant M_r \alpha_n$, $E_n(g_0)_{L_r} \leqslant M_r \alpha_n$, показывают, что неравенства (5) и (8) не улучшаемы.

Отметим, что из теоремы Джексона и неравенства автора (см. ([9]), теорема 1)

$$\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p} \leqslant \frac{c_{p,k}}{n^k} \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kl-1} E^l_{\nu-1}(f)_{L_p}\right\}^{1/l} \quad (l = \min(2, p)) \tag{9}$$

следует, что оценки (3), (5) и (8) эквивалентны неравенству

$$\|f(x)\|_{L_p} \leqslant C_p \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \omega^p_k\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_r} n^{p/r-2}\right\}^{1/p}. \tag{10}$$

В общем случае $1 \leqslant r < p < \infty$ неравенства типа (10) при $k = 1$, как показал П. Л. Ульянов (см. ([5])), могут быть получены, опираясь на рассмотрения, связанные с понятием равноизмеримой функции. П. Л. Ульянов показал при этом, что неравенство (10) ($k = 1$) в известном смысле не может быть улучшено. Отметим, что вместо нулевого коэффициента Фурье, принятого здесь равным нулю, в работе П. Л. Ульянова правая часть неравенства (10) ($k = 1$) содержит дополнительное слагаемое $\|f(k)\|_{L_1}$.

Мы подробно остановились на приведенных выше соображениях не только для того, чтобы показать, как теоремы вложения типа неравенств (3), (5) и (8) в соответствующих случаях следуют из теорем Харди — Литтльвуда — Пэли, что отмечалось уже автором в ([10]) (см. ([10]), теоремы 1.3.9, 1.4.11, $k = 0$) *, но главным образом с целью показать метод получения в этих случаях такого типа теорем вложения для L_p-классов функций многих переменных **.

При любом p ($1 < p < \infty$) и $1 \leqslant r \leqslant 2$ ($r < p$) справедливы следующие утверждения, формулируемые в обозначениях, которые приняты в статье автора ([11]).

Теорема 1***. *Если* $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_r^{(k)}$ *и выполнены условия*

$$E^{(\nu)}(f; p; r) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} (E^{(\nu)}_{n-1,\infty}(f)_{L_r^{(k)}})^p\, n^{(p/r-1)k-1}\right\}^{1/p} < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

или эквивалентные им условия

$$\Omega^{(\nu)}_m(f; p; r) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\omega^{(\nu)}_m\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_r^{(k)}}\right)^p n^{(p/r-1)k-1}\right\}^{1/p} < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

$\left(m > k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\right)$, *то* $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_p^{(k)}$,

* Для произвольных функций, заданных на всей вещественной оси, см. также ([8]). В ([5]) и в более поздней статье ([7]) отсутствуют ссылки на эти работы, а также на предшествовавшую им работу автора ([9]), в которой в общем случае указанным выше методом были получены точные порядковые неравенства между модулями гладкости и наилучшими приближениями для классов L_p, необходимые при переходе от неравенств типа (10) к неравенствам (3), (5) и (8).

** На известный интерес нахождения такого типа утверждений для функций многих переменных обращается внимание в ([5]) (см. ([5]), стр. 685).

*** В теоремах 1 и 2 среднее значение функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ по периоду принимается равным нулю.

$$\|f\|_{L_p^{(k)}} = \|f(x_1, \ldots, x_k)\|_{L_p^{(k)}} \leqslant C_{p,k} \sum_{\nu=1}^{k} E^{(\nu)}(f; p; r)$$

$$\|f\|_{L_p^{(k)}} \leqslant C_{p,k} \sum_{\nu=1}^{k} \Omega^{(\nu)}(f; p; r). \tag{11}$$

Пример функции $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_r^{(k)}$ с рядом Фурье

$$\sum_{l=0}^{\infty} \delta_l(k; r) \prod_{i=1}^{k} \sum_{\nu_i=2^l}^{2^{l+1}-1} \begin{matrix} \cos \nu_i x \\ \sin \nu_i x \end{matrix}, \quad \text{где } \delta_l(k; r) = 2^{-lk(1-1/r)} (\alpha_{2^l}^r - \alpha_{2^{l+1}}^r)^{1/r}, \alpha_n \downarrow 0,$$

показывает, что неравенство (11) нельзя улучшить.

Отметим, что в теореме 1 содержится k условий, обеспечивающих вложение из $L_r^{(k)}$ в $L_p^{(k)}$. При этом скорость стремления к нулю величин $E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_r^{(k)}}$ для всех ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ должна быть порядка $o(n^{1/p-1/r})$ и такой, что ряды $E^{(\nu)}(f; p; r)$ сходились. В связи с этим приведем еще одно предположение иного характера, в котором «слабые» свойства функций по одним переменным для обеспечения вложения из $L_r^{(k)}$ в $L_p^{(k)}$ могут компенсироваться более сильными их свойствами по другим переменным.

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_r^{(k)}$ и для некоторой системы чисел $\alpha_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k;\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1)$ выполнены условия*

$$\widetilde{E}^{(\nu)}(f; p; r) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_{n-1,\infty}^{(\nu)}(f)_{L_r^{(k)}}\right)^{\alpha_\nu p} n^{p/r-2} \right\}^{1/p} < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

или эквивалентные им условия

$$\widetilde{\Omega}_{m_\nu}^{(\nu)}(f; p; r) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\omega_{m_\nu}^{(\nu)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_r^{(k)}} \right)^{\alpha_\nu p} n^{p/r-2} \right\}^{1/p} < \infty$$

$$\left(\nu = 1, 2, \ldots, k;\ m_\nu > \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\alpha_\nu}\right).$$

Тогда $f(x_1, \ldots, x_k) \in L_p^{(k)}$,

$$\|f\|_{L_p^{(k)}} \leqslant C_{p,k} \prod_{\nu=1}^{k} \widetilde{E}^{(\nu)}(f; p; r), \quad \|f\|_{L_p^{(k)}} \leqslant C_{p,k} \prod_{\nu=1}^{k} \widetilde{\Omega}_{m_\nu}^{(\nu)}(f; p; r).$$

Днепропетровский сельскохозяйственный институт

Поступило 29 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 38 (1951). [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., 1965. [3] А. А. Конюшков, Матем. сборн., 44(86), 53 (1958). [4] Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948. [5] П. Л. Ульянов, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 3 (1968). [6] П. Л. Ульянов, ДАН, 178, № 6 (1968). [7] П. Л. Ульянов, ДАН, 184, № 5 (1969). [8] М. Ф. Тиман, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 6 (25) (1961). [9] М. Ф. Тиман, Матем. сборн., 46(88), 1 (1958). [10] М. Ф. Тиман, Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах, Диссертация, Тбилиси, 1962. [11] М. Ф. Тиман, Матем. сборн., 75(117), 3 (1968).