Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

А. М. ЕЖОВ, С. П. ПУЛЬКИН

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 30 I 1970)

§ 1. Уравнение

$$\operatorname{sgn} y\cdot|y|^m u_{xx}+u_{yy}-\lambda^2\operatorname{sgn} y\cdot|y|^m u=0\quad(m>0)\tag{1}$$

будем рассматривать в области D, ограниченной гладкой кривой Γ_0, лежащей в полуплоскости $y\geqslant 0$, с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и характеристиками Γ_1, Γ_2 уравнения (1), исходящими из точек A и B.

Задача Трикоми. В области D найти решение $u(x, y, \lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_0}&=\varphi(x,\lambda),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad -\infty<\lambda<+\infty,\\ u|_{\Gamma_1}&=\psi(x,\lambda),\quad 0\leqslant x\leqslant {}^1/_2,\quad -\infty<\lambda<+\infty,\end{aligned}\tag{2}$$

и условиям склеивания

$$u|_{y=0-0}=u|_{y=0+0},\quad \partial u/\partial y|_{y=0-0}=\partial u/\partial y|_{y=0+0}.$$

Единственность решения задачи Трикоми для уравнения

$$yu_{xx}+u_{yy}+c(x,y)u=0\tag{F}$$

доказана в [1,2]. В [3] установлен принцип абсолютного экстремума для уравнения (F) при $c(x, y)=-\lambda^2 y$. Во всех этих работах доказательство единственности решения задачи Трикоми проведено при условии, что коэффициент $c(x, y)$ достаточно мал, или когда длина линии перехода достаточно мала. При помощи некоторого приема оказывается возможным снять это ограничение для уравнения (1).

Введем новую неизвестную функцию $v(x, y, \lambda)$ по формуле

$$u(x,y,\lambda)=v(x,y,\lambda)\exp\left[\int\omega(x)\,dx\right],\tag{3}$$

где $\omega(x)$ есть непрерывно дифференцируемое и неотрицательное решение на $[0;1]$ дифференциального уравнения

$$d\omega/dx+\omega^2-\lambda^2=0.\tag{4}$$

Функция $v(x, y, \lambda)$ является решением уравнения

$$\operatorname{sgn} y\cdot|y|^m v_{xx}+v_{yy}+2\operatorname{sgn} y\cdot|y|^m\omega(x)v_x=0.\tag{5}$$

Функцией $\omega(x)$ с требуемыми свойствами может служить функция $\omega(x)=\lambda\operatorname{th}\lambda x$. Для коэффициентов уравнения (5) выполняются некоторые условия, установленные в [4]. Функция

$$z(x,y,\lambda)=\pm v(x,y,\lambda)+My,$$

где M — постоянная, также является решением уравнения (5). Выберем M так, чтобы $z(x, y, \lambda)$ была неубывающей функцией по y на характеристике

Γ_1. Для этого достаточно положить

$$M = \max_{\Gamma_1} |v_y - (y)^{m/2} v_x|. \tag{6}$$

Тогда функция $z(x, y, \lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Проттера (см. [4], § 5, теорема 4), на основании которой можем написать

$$|v(x, y, \lambda)| \leqslant \max_{\Gamma_0} |v(x, y, \lambda)| + MM_1, \tag{7}$$

где $M_1 = \max(y_0 - y)$, $\quad y_0 = \max_{\overline{D}} |y|$.

Положим $g(x) = \exp\left[-\int \omega(x)\, dx\right]$. Полагая здесь $\omega(x) = \lambda \operatorname{th} \lambda x$, получим $g(x) = 1/2\operatorname{ch} \lambda x$. Так как $v(x, y, \lambda) = g(x) u(x, y, \lambda)$, то, переходя в (6) к функции $u(x, y, \lambda)$, находим

$$M = \max_{\Gamma_1} |g(x)[u_y - (-y)^{m/2} u_x] - (-y)^{m/2} u g'(x)|.$$

Отсюда получаем оценку

$$M \leqslant M_2 [\max_{\Gamma_1} g(x) |\psi_x'(x, \lambda)| + |\lambda| \max_{\Gamma_1} g(x) |\psi(x, \lambda)|], \tag{8}$$

где $M_2 = \max_{\Gamma_1} (-y)^{m/2}$.

Теперь оценку (7) с учетом (8) перепишем так:

$$|u(x, y, \lambda)|\, g(x) \leqslant \max_{\Gamma_0} g(x) |\varphi(x, \lambda)| +$$
$$+ M_1 M_2 [\max_{\Gamma_1} g(x) |\psi_x'(x, \lambda)| + |\lambda| \max_{\Gamma_1} g(x) |\psi(x, \lambda)|].$$

Принимая еще во внимание, что

$$\max_{\Gamma_1} g(x) = \max_{\Gamma_0} g(x) = {}^1/_2,$$

получаем окончательно оценку решения задачи (1), (2):

$$|u(x, y, \lambda)| \leqslant \operatorname{ch} \lambda x \{\max_{\Gamma_0} |\varphi(x, \lambda)| +$$
$$+ M_1 M_2 [\max_{\Gamma_1} |\psi_x'(x, \lambda)| + |\lambda| \max_{\Gamma_1} |\psi(x, \lambda)|]\}. \tag{9}$$

Из (9) следует единственность решения задачи (1), (2), а также непрерывная зависимость этого решения от краевых функций при любом фиксированном λ.

§ 2. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m (u_{xx} + u_{zz}) + u_{yy} = 0, \quad m > 0. \tag{10}$$

Результат, полученный в § 1, позволяет решить следующую краевую задачу. Пусть G — область трехмерного пространства (x, y, z), ограниченная поверхностями:

$$S_0: x(1 - x) = \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \quad y \geqslant 0, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_1: x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant {}^1/_2, \quad -\infty < z < +\infty,$$

$$S_2: x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad {}^1/_2 \leqslant x \leqslant 1, \quad -\infty < z < +\infty.$$

З а д а ч а ТС. В области G найти решение $w(x, y, z)$ уравнения (10), непрерывное в $\bar{G}$ и удовлетворяющее условиям:

$$w|_{S_0} = \Phi(x, z), \quad w|_{S_1} = \Psi(x, z),$$
$$\lim_{z\to\infty} w(x, y, z) = \lim_{z\to\infty} \partial w/\partial z = 0. \tag{11}$$

Эта задача рассмотрена при $m = 1$ в ([3]). Однако в этой работе не доказано существование решения задачи (1), (2) для любого λ и не получены условия, обеспечивающие существование решения в виде интеграла Фурье. Наши оценки решения задачи (1), (2) позволяют восполнить этот пробел. Пусть $w(x, y, z)$ — решение задачи ТС. Его преобразование Фурье по переменному z

$$u(x, y, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y, z)\, e^{i\lambda z} dz$$

является решением в области D уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$u|_{\Gamma_0} = \varphi(x, \lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$
$$u|_{\Gamma_1} = \psi(x, \lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

где D — плоская область, ограниченная дугами Γ_0, Γ_1, Γ_2, являющимися линиями пересечения плоскости $z = 0$ с поверхностями S_0, S_1, S_2 соответственно. При этом

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, z)\, e^{i\lambda z} dz,$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, z)\, e^{i\lambda z} dz.$$

Таким образом, задача ТС сведена к задаче (1), (2). Обратно, если функция $u(x, y, \lambda)$ есть решение задачи Трикоми (1), (2), то решение задачи ТС получается с помощью обратного преобразования Фурье:

$$w(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, \lambda)\, e^{-iz\lambda} d\lambda. \tag{12}$$

Учитывая оценку (9) функции $u(x, y, \lambda)$, мы можем на краевые функции $\Phi(x, z)$ и $\Psi(x, z)$ наложить условия, обеспечивающие существование интеграла (12). Пусть функции $\Phi(x, z)$, $\Psi(x, z)$ таковы, что для функций $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ имеют место оценки

$$\varphi(x, \lambda) = O(1 / |\lambda|^{\alpha} \operatorname{ch} \lambda), \quad \psi(x, \lambda) = O(1 / |\lambda|^{1+\alpha} \operatorname{ch} \lambda),$$
$$\psi_x'(x, \lambda) = O(1 / |\lambda|^{\alpha} \operatorname{ch} \lambda), \quad \alpha > 1.$$

Тогда из (9) имеем оценку $u(x, y, \lambda) = O(1/|\lambda|^{\alpha})$, которая обеспечивает существование интеграла (12), дающего решение задачи ТС.

Куйбышевский государственный
университет

Поступило
14 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. И. Бабенко, К теории уравнений смешанного типа, Диссертация, М., 1951. [2] В. Ф. Волкодавов, Л. М. Невоструев, Волжск. матем. сборн., в. 4 (1966). [3] А. М. Нахушев, Дифференциальн. уравн., 4, в. 1 (1968). [4] S. Agmon, L. Nirenberg, M. Protter, Comm. Pure and Appl. Math., 6, 4 (1953).