Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 681.142.64 *КИБЕРНЕТИКА и ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Т. М. ЗОЛОТОВА

ФУНКЦИИ УПОРЯДОЧЕННОГО ВЫБОРА НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 27 I 1970)

Аппарат непрерывной логики в последние годы все более широко применяется при построении аналоговых преобразователей, восстанавливающих органов, при анализе и синтезе нелинейных электрических сетей, а также при решении других задач конструирования систем автоматики и устройств переработки информации ([1-6]). При этом чаще всего используются простейшие функции max, min и inv, и лишь недавно была определена функция медиана, являющаяся аналогом функции голосования по большинству ([5]). В настоящей работе даются определения и рассматриваются некоторые важнейшие свойства двух других функций непрерывной логики, обобщающих на непрерывный случай функцию голосования «m из n» и пороговую функцию двоичных переменных.

Пусть имеется n непрерывных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $A \leqslant x_i \leqslant B$, $i = 1, \ldots, n$. Любой набор фиксированных значений $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ этих переменных может быть упорядочен в порядке их невозрастания или неубывания. В первом случае упорядоченную последовательность значений переменных условимся обозначать через $\overleftarrow{x}$, а во втором — через $\overrightarrow{x}$.

Определение 1. Функцией упорядоченного выбора $M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$, или $M_n^m\{\overrightarrow{x}\}$, где m — заданное целое число, $1 \leqslant m \leqslant n$, называется функция, определенная для всех $A \leqslant x_i \leqslant B$, $i = 1, \ldots, n$, которая каждому $\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$ сопоставляет значение $\tilde{x}_{i_j}(\tilde{x}_{j_k})$, занимающее m-е место в упорядоченной последовательности $\{\overleftarrow{x}\}$ (или $\{\overrightarrow{x}\}$).

Очевидно, что для данного $\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$

$$M_n^m\{\overrightarrow{x}\} = M_n^{n-m+1}\{\overleftarrow{x}\}, \quad M_n^m\{\overleftarrow{x}\} = M_n^{n-m+1}\{\overrightarrow{x}\}. \tag{1}$$

Отметим, что в случае $m = (n+1)/2$ мы получим функцию медиана ([6]):

$$M_n^{(n+1)/2}\{\overrightarrow{x}\} = M_n^{(n+1)/2}\{\overleftarrow{x}\} = \mathrm{med}\,\{x\}.$$

Если x_i принимают только дискретные значения 0 или 1, то функция упорядоченного выбора $M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$ представляет собой функцию голосования «m из n».

Функция упорядоченного выбора может быть представлена в виде суперпозиции элементарных функций max и min непрерывной логики. Составим функции min от всевозможных сочетаний из n переменных по m:

$$\begin{gathered} u_1 = \min(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m), \\ u_2 = \min(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_r = \min(x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n), \end{gathered} \tag{2}$$

где $r = C_n^m$. Из (2) и определения функции упорядоченного выбора следует, что

$$M_n^m\{\overleftarrow{x}\} \geqslant u_1, \ M_n^m\{\overleftarrow{x}\} \geqslant u_2, \ \ldots, \ M_n^m\{\overleftarrow{x}\} \geqslant u_r, \tag{3}$$

ибо, если нашлось хотя бы одно $u_i > M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$, то это означает, что имеется m переменных, принимающих значения, строго бо́льшие $M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$, а это невозможно. Из (3) вытекает, что

$$M_n^m\{\overleftarrow{x}\} \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant r} u_i. \tag{4}$$

С другой стороны, в каждой точке $\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$, $A \leqslant x_i \leqslant B$, $i = 1, \ldots, n$, имеется по крайней мере m переменных, значения которых больше или равны $M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$, поэтому найдется такое u_i, что $M_n^m\{\overleftarrow{x}\} \leqslant u_i$ и, значит,

$$M_n^m\{\overleftarrow{x}\} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant r} u_i. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$M_n^m\{\overleftarrow{x}\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} u_i. \tag{6}$$

Образуя max от всевозможных сочетаний из n переменных по m:

$$\begin{aligned} v_1 &= \max(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m), \\ v_2 &= \max(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_r &= \max(x_{n-m+1}, x_{n-m-2}, \ldots, x_{n-1}, x_n), \end{aligned} \tag{7}$$

можно аналогичным образом показать, что

$$M_n^m\{\overrightarrow{x}\} = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} v_i. \tag{8}$$

Число логических элементов, необходимых для реализации функций $M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$ и $M_n^m\{\overrightarrow{x}\}$, равно $C_n^m + 1$. Но в случае $m < (n+1)/2$ выгодно (с целью сокращения требуемого числа элементов) воспользоваться (1). Тогда легко видеть, что для реализации $M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$ и $M_n^m\{\overrightarrow{x}\}$ достаточно $C_n^{n-m+1} + 1$ логических элементов.

Функцию упорядоченного выбора $M_n^m\{\overleftarrow{x}\}$ можно обобщить, приписывая переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ весовые коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где a_i $(i = 1, \ldots, n)$ — натуральные числа.

Определение 2. Функцией упорядоченного выбора с предпочтением $F_n^m\{a, \overleftarrow{x}\}$ (или $F_n^m\{a, \overrightarrow{x}\}$), где m — заданное целое число, $1 \leqslant m \leqslant N = \sum_{i=1}^{n} a_i$, называется функция переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ с приписанными им весами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, заданная на области $A \leqslant x_i \leqslant B$, $i = 1, \ldots, n$, и сопоставляющая каждому набору значений переменных $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ значение, занимающее k-е место в упорядоченной последовательности $\overleftarrow{x} = (\tilde{x}_{i_1} \geqslant \tilde{x}_{i_2}, \ldots, \tilde{x}_{i_n})$ (или $\overrightarrow{x} = \tilde{x}_{j_1} \leqslant \tilde{x}_{j_2}, \ldots, \tilde{x}_{j_n}$) этих значений, где k определяется из условия

$$\sum_{s=1}^{k} a_{i_s} \geqslant m > \sum_{s=0}^{k-1} a_{i_s} \quad (a_{i_0} = 0). \tag{9}$$

Принятое нами название этой функции объясняется тем, что значениями переменной, имеющей больший вес, оказывается «предпочтение» при выборе, в том смысле, что при одинаковых функциях распределения ее значения выбираются чаще.

Определенная указанным образом функция упорядоченного выбора с предпочтением является обобщением на случай непрерывных переменных пороговой функции двоичных переменных. Действительно, полагая, что все x_i принимают только дискретные значения 0 или 1, из (9) имеем

$$F_n^m\{a, \overleftarrow{x}\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i < m, \\ 1 & \text{при } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant m, \end{cases} \tag{10}$$

что и является определением пороговой функции ([7]).

Если рассматривать переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с целочисленными весовыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ как расширенный вектор переменных $[a \otimes x] = \{x_1, \ldots, x_n\}$, где каждая переменная x_i повторяется столько раз, каков ее вес, то между обычной функцией упорядоченного выбора и функцией $F_n{}^m\{a, x\}$ имеет место соотношение

$$F_n^m\{a, \overleftarrow{x}\} = M_N^m\{\overleftarrow{[a \otimes x]}\}. \tag{11}$$

Используя соотношения (6) или (8) и (11), можно найти представление функции $F_n{}^m\{a, \overleftarrow{x}\}$ через max и min.

Институт электронных управляющих машин
Москва

Поступило
19 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Гинзбург, Математическая непрерывная логика и изображение функций, М., 1968. [2] В. Н. Иванов, Техническая кибернетика, № 3, 66 (1968). [3] М. А. Розенблат, ДАН, 171, № 4, 814 (1966). [4] Д. А. Браславский, Системы с переменной структурой и их применения в задачах автоматического полета, М., 1968, стр. 217. [5] Г. И. Чесноков, А. М. Якубович, Автоматика и телемех., № 8, 137 (1968). [6] М. А. Розенблат, Автоматика и телемех., № 1, 93 (1969). [7] М. Дертоузос, Пороговая логика, М., 1967.