Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 2

УДК 519.44

МАТЕМАТИКА

М. М. ГОЛЬДЕНБЕРГ, Н. Ф. СЕСЕКИН

О ГРУППАХ С ИНВАРИАНТНЫМИ НЕ ВПОЛНЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫМИ ПОДГРУППАМИ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 7 I 1970)

1. Подгруппа H группы G называется θ-подгруппой, если она обладает свойством θ, и $\bar{\theta}$-подгруппой в противном случае. Исследованию групп, в которых инвариантна каждая $\bar{\theta}$-подгруппа (назовем такие группы $\bar{\theta}I$-группами) посвящен ряд работ последних лет (см. литературу в обзоре С. Н. Черникова [1]), где в качестве θ брались цикличность, коммутативность, нильпотентность и некоторые другие свойства. К $\bar{\theta}I$-группам удобно относить дедекиндовы группы и, с другой стороны, группы, в которых каждая собственная подгруппа является θ-подгруппой. Если θ — абсолютное теоретико-групповое свойство, которое наследуется подгруппами θ-групп, но не обратно, то знание $\bar{\theta}$-групп, все собственные подгруппы которых являются θ-подгруппами, играет существенную роль при описании $\bar{\theta}I$-групп. В самом деле, фактор-группа $\bar{\theta}I$-группы по ее собственной минимальной $\bar{\theta}$-подгруппе является в этих случаях дедекиндовой, так что известным оказывается почти весь коммутант исследуемой группы.

В настоящей работе в качестве θ взято свойство полного расщепления группы.

Определение [2]. Группа G называется вполне расщепляемой, если она представима в виде теоретико-множественной суммы некоторого множества своих локально циклических подгрупп, попарно пересекающихся по единичной подгруппе.

Обозначив свойство группы быть вполне расщепляемой буквой r, мы приходим к классу $\bar{r}I$-групп. Естественно, мы рассматриваем лишь такие $\bar{r}I$-группы, которые обладают $\bar{r}$-подгруппами, и это в дальнейшем не оговаривается.

$\bar{r}$-Группы, все собственные подгруппы которых являются r-группами, введены П. Г. Конторовичем [3] и названы z-группами. Все локально конечные z-группы конечны, их описание дано в [3, 4]. Вопрос о существовании бесконечных z-групп открыт. Можно доказать, что бесконечная z-группа, если она существует, совпадает со своим коммутантом. Поэтому $\bar{r}I$-группы изучены при дополнительном условии локальной конечности, а в непериодическом случае — локальной разрешимости.

К классу $\bar{r}I$-групп принадлежат, очевидно, все $\bar{c}I$-группы, т. е. группы с инвариантными нециклическими подгруппами. Строение локально конечных $\bar{c}I$-групп известно [5–7], поэтому при описании $\bar{r}I$-групп мы $\bar{c}I$-групп не приводим; для краткости дедекиндовы группы считаем $\bar{c}I$-группами.

Обозначения: $|g|$ — порядок элемента g; $[b, a] = bab^{-1}a^{-1}$; G' — коммутант группы G; $Z(G)$ — центр группы G; p, q — различные простые числа; $A\lambda B$ — полупрямое произведение групп A и B с инвариантным множителем A и дополнительным B.

2. Все конечные z-группы разрешимы; разрешимы, следовательно, все локально конечные $\bar{r}I$-группы. Строение их полностью описывается приводимыми ниже тремя теоремами.

Теорема 1. *Конечная p-группа тогда и только тогда является $\bar{r}I$-группой, когда она одного из следующих типов:*

1) $\bar{c}J$-*группа.*

2) $G = G_1 \times A$, A — *элементарная абелева* p-*группа* (*быть может, тривиальная*), *а* $G_1 = \{a_0\}\lambda\{a_1\}\lambda\{a_2\}\lambda\ldots\lambda\{a_n\}$, $n \geqslant 2$; $a_0^{p^u} = z$, $u \geqslant 1$, $|z| = |a_1| = \ldots = |a_n| = p$; $[a_i, a_{i-1}] = z$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $[a_i, a_j] = 1$ *при* $j \leqslant i - 2$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

3) $G = (\{a\} \times \{b\})\lambda\{c\}$, $a^{p^{m-1}} = z$, $m \geqslant 1$, $|z| = |c| = p$, $|b| = p^2$, $[c, a] = 1$, $[c, b] = z$ (*в группах типа* 1)—3) p — *произвольное простое число*).

4) $G = (\{a\}\lambda\{b\})\lambda\{c\}$, $a^p = z$, $|z| = |b| = |c| = p$, $p > 2$, $[b, a] = z$, $[c, a] = b$, $[c, b] = 1$.

5) $G = (\{a\} \times \{b\})\lambda\{c\}$, $a^p = z$, $|z| = |b| = |c| = p$, $p > 2$, $[c, a] = b$, $[c, b] = z^u$, *где* $u = 1$ *или* $u = u_0$ — *наименьший квадратичный невычет по модулю* p.

6) $G = (\{a\} \times \{b\})\lambda\{c\}$, $a^p = z_1$, $b^p = z_2$, $|z_1| = |z_2| = |c| = p$, $p > 2$, $[c, a] = z_2$, $[c, b] = z_1^u z_2^v$, *причем* $4u + v^2$ — *квадратичный невычет по модулю* p.

7) $G = (Q \times \{b\})\lambda\{c\}$, $|b| = 4$, $|c| = 2$, Q — *группа кватернионов*, $[c, g] = 1$ *для* $g \in Q$, $[c, b] = z$, $z \in Q$, $|z| = 2$.

8) $G = (\{a\}\lambda\{b\})\lambda\{c\}$, $a^4 = z$, $|z| = |b| = |c| = 2$, $[b, a] = z$, $[c, a] = b$, $[c, b] = 1$.

9) $H \subset G \subseteq G^*$, $G^* = H\lambda C$, $H = \{a\} \times \{b\}$, $|a| = |b| = 4$, $C = \{i\} \times \{j\}$, $|i| = |j| = 2$, *причем элементы* i, j *индуцируют в группе* H *автоморфизмы, определяемые следующими матрицами над полем из четырех элементов*:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10) $G = \{a\}\lambda\{i\}$, $|a| = 8$, $|i| = 2$, $[i, a] = a^2$.

11) $G = (\{a\}\lambda\{i\})\lambda\{j\}$, $|a| = 8$, $a^4 = z$, $|i| = |j| = 2$, $[i, a] = a^{-2}$, $[j, a] = z^{\varepsilon_1}$, $[j, i] = z^{\varepsilon_2}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 2$.

Теорема 2. *Конечная непримарная группа* G *тогда и только тогда является* $\bar{r}J$-*группой, когда она одного из следующих типов*:

1) $\bar{c}J$-*группа.*

2) *Группа Фробениуса вида* $C = (\{a\} \times \{b\})\lambda\{g\}$, *где* $|a| = p$, $|b| = p^2$ или $|b| = pq$.

3) $G = \{a\}\lambda(\{b\}\lambda\{c\})$, $|a| = p > 2$, $|b| = 4$, $|c| = 2$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $ca = ac$, $cbc = b^{-1}$.

4) $G = (\{a\} \times \{d\} \times \{b\})\lambda\{c\}$, $|a| = |d| = p > 2$, $|b| = 4$, $|c| = 2$, $cac = a^{-1}$, $cdc = d^{-1}$, $cbc = b^{-1}$.

5) $G = (\{a\}\lambda\{b\}) \times (\{c\}\lambda\{d\})$, $|a| = p$, $|b| = |d| = q$, $|c| = r$, r — *простое число*, $r \neq q$, *подгруппы* $\{a\}\lambda\{b\}$ *и* $\{c\}\lambda\{d\}$ *нециклические.*

6) $G = [(\{a\} \times \{b\})\lambda\{d\}] \times \{c\}$, *где* $(\{a\} \times \{b\})\lambda\{d\}$ — *группа Фробениуса*, $|a| = |b| = p$, $|d| = |c| = q$.

7) $G = (\{a\}\lambda\{b\}) \times B$, $|a| = p$, $|b| = q$, *подгруппа* $\{a\}\lambda\{b\}$ *нециклическая*, B — *группа экспоненты* q, *либо абелева ранга* $\geqslant 2$, *либо неабелева порядка* q^3.

8) $G = (\{a\} \times \{b\} \times \{c\})\lambda\{d\}$, $|a| = p$, $|b| = |c| = |d| = q$, *подгруппа* $\{a\}\lambda\{d\}$ *нециклическая*, $db = bd$, $dcd^{-1} = bc$.

9) $G = P\lambda\{g\}$, P — *силовская* p-*подгруппа экспоненты* p, *причем*:

α) *если* P *абелева, то* $G = \{a\} \times (P_1\lambda\{g\})$, *подгруппа* P_1 *нециклическая, и для любого* $g^k \neq 1$ *в* P_1 *нет собственных* g^k-*допустимых подгрупп;*

β) *если* P *неабелева, то* $P' = z(p) = Z(G) = \{a\}$, *и для любого* $g^k \neq 1$ *в* P *нет собственных* g^k-*допустимых подгрупп, отличных от* $\{a\}$.

Сделаем ряд замечаний о доказательствах теорем 1 и 2.

Справедливо следующее

Предложение. *Коммутант конечной* $\bar{r}J$-*группы содержит во всякой ее* z-*подгруппе.*

Из описания конечных z-групп следует поэтому, что коммутант конечной примарной $\bar{r}J$-группы содержится в подгруппе порядка p^3 с элементом порядка p^2. Оказывается, что при $p \neq 2$ коммутант может быть либо циклическим порядка p (группы типов 2), 3) теоремы 1) либо абелевым типа (p, p) (группы типов 4), 5), 6)). При $p = 2$ существуют еще группы (типов 9), 10)) с циклическим коммутантом порядка 4.

Доказательство теоремы 2 основано на рассмотрении конечных непримарных $\bar{r}J$-групп, содержащих z-подгруппы всех возможных типов, и описании конечных разрешимых вполне расщепляемых групп ([9]).

Из теорем 1 и 2 следует, что бесконечная локально конечная $\bar{r}J$-группа имеет простой коммутант.

Теорема 3. *Бесконечная локально конечная группа тогда и только тогда принадлежит классу $\bar{r}J$-групп, когда она одного из типов:*

1) *$\bar{c}J$-группа.*

2) *$G = G_1 \times A$, где A — элементарная абелева p-группа, G_1 — центральное склеивание по подгруппе $\{a^p\}$ некоторого множества изоморфных групп типа $\{a\}\lambda\{b\}$, $|a| = p^{u+1}$, $u \geqslant 1$, $|b| = p$, $[b, a] = a^{1+p^u}$ и, возможно, циклической группы порядка p^{u+1} или группы типа p^∞.*

3) *$G = (A \times \{b\})\lambda\{c\}$, A — группа типа p^∞, $|b| = p^2$, $|c| = p$, $[c, a] = 1$ для $a \in A$, $[c, b] = z$, $|z| = p$, $z \in A$.*

4) *$G = (\{a\}\lambda\{b\}) \times B$, $|a| = p$, $|b| = q$, B — элементарная абелева q-группа бесконечного ранга, $\{a\}\lambda\{b\}$ — нециклическая.*

Замечание. В группах типа 2) теоремы 1 и теоремы 3 инвариантна каждая неизолированная подгруппа (подгруппа H группы G изолирована в G, если H содержит всякую циклическую подгруппу из G, с которой имеет нетривиальное пересечение ([8])). Можно показать, что если группа G обладает неизолированной подгруппой и все неизолированные подгруппы в G инвариантны, то G является группой указанного выше типа.

3. Теорема 4. *Непериодическая локально разрешимая $\bar{r}J$-группа содержит смешанную абелеву подгруппу.*

Теорема 4 вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если в локально разрешимой группе G без кручения вполне расщепляемы все неинвариантные подгруппы, то сама группа G вполне расщепляема.*

Теорема 5. Пусть *G — неабелева группа, содержащая смешанную абелеву подгруппу. G является $\bar{r}J$-группой тогда и только тогда, когда ее коммутант — циклическая подгруппа простого порядка p, а все элементы конечного порядка порождают локально циклическую p-подгруппу или группу кватернионов.*

Если дополнительно потребовать, чтобы G была группой с конечным числом образующих, то $G = G_1 \times A$, где A — свободная абелева группа конечного ранга, а подгруппа G_1 уже не разлагается нетривиальным образом в прямое произведение. Для группы G_1 найдены определяющие соотношения.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
30 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Укр. матем. журн., 21, 2, 193 (1969). [2] П. Г. Конторович, Матем. сборн., 5, 286 (1939). [3] П. Г. Конторович, Матем. сборн., 7, 27 (1940). [4] А. И. Старостин, Уч. зап. Уральск. унив., 23, 22 (1959). [5] А. Д. Устюжанинов, Матем. зап. Уральск. унив., 6, 1, 107 (1967). [6] Н. Ф. Лиман, Доп. АН УРСР, сер. А, 12, 1073 (1967). [7] Н. Ф. Лиман, Матем. заметки, 4, 1, 75 (1968). [8] П. Г. Конторович, Матем. сборн., 19, 287 (1946). [9] А. Н. Старостин, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 2 (15), 168 (1960).