Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 6

УДК 519.44

МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР С. А. ЧУНИХИН

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ И СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1. Конечная группа, у которой все силовские подгруппы инвариантны, называется, как известно, специальной или нильпотентной. В 1929 г. в работе ([1]) нами были получены следующие теоремы:

I. *Если для каждого примарного делителя (определение см. ниже)* $\delta > 1$ *порядка коммутанта конечной группы порядка* g *выполняется условие* $(\delta - 1, g) = 1$, *то группа — специальная.*

II. *Если для каждого примарного делителя* $\delta > 1$ *натурального числа* g *выполняется условие* $(\delta - 1, g) = 1$, *то все группы порядка* g *— специальные.*

Через 30 лет теорема II была вторично получена Г. Паздерским ([2]), которому наша работа ([1]), по-видимому, осталась неизвестной. Работа ([1]) была продолжена нами в ([3], [4]). Основную арифметическую идею ([1]) и ее продолжений ([3], [4]) в сочетании с основной чертой нашего метода индексиалов ([5]) и факторизаций групп ([9]) (искать подгруппы, порядки которых являются произведениями индексов некоторых рядов подгрупп) мы прилагаем сейчас к обнаружению нильпотентных и сверхразрешимых подгрупп конечной группы. Отметим по простоте формулировки приводимую ниже теорему 2.

§ 2. Обозначения. Примарный делитель натурального числа — делитель, являющийся степенью простого числа (включая 1); если F — конечная последовательность натуральных чисел, то $\overline{F}$ при F непустом обозначает произведение всех элементов F, а при F пустом равно 1; $\mathfrak{G}$ — конечная группа; $|\mathfrak{G}|$ — ее порядок; k — порядок ее коммутанта; $\mathfrak{E}$ — ее единичная подгруппа; инвариантный ряд $\mathfrak{G}$ — ряд подгрупп, все члены которого инварианты в $\mathfrak{G}$; уплотнение инвариантного ряда R группы $\mathfrak{G}$ (см. ([5])) R_f: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supseteq \mathfrak{G}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{G}_{\beta-1} \supseteq \mathfrak{F}_\beta \supseteq \mathfrak{G}_\beta \supseteq \mathfrak{F}_{\beta+1} \supseteq \mathfrak{G}_{\beta+1} \supseteq \ldots$ $\ldots \mathfrak{G}_{\nu-1} \supseteq \mathfrak{F}_\nu \supseteq \mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ при помощи подгрупп $\mathfrak{F}_i$, $i = \beta, \ldots, \nu$, назовем индексиальным рядом $\mathfrak{G}$, если каждая $\mathfrak{F}_i$ удовлетворяет «условию сопряженности»: всякая подгруппа из $\mathfrak{G}_{i-1}$, сопряженная с $\mathfrak{F}_i$ в $\mathfrak{F}_\beta$, сопряжена с $\mathfrak{F}_i$ уже в $\mathfrak{G}_{i-1}$; подгруппы $\mathfrak{F}_i$ назовем факториальными подгруппами ряда R или ряда R_f; если $|\mathfrak{F}_i / \mathfrak{G}_i| = f_i$, то $f_\beta f_{\beta+1} \ldots f_\nu = h$ назовем индексиалом группы $\mathfrak{G}$ или индексиалом ряда R, а $\mathfrak{F}_i / \mathfrak{G}_i$ — его факторами; если $\mathfrak{A} / \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}$ назовем числителем, а $\mathfrak{B}$ — знаменателем фактор-группы $\mathfrak{A} / \mathfrak{B}$; подгруппу $\widetilde{\mathfrak{F}}_i$, $\beta \leqslant n \leqslant \nu$ из $\mathfrak{F}_\beta$ назовем нильпотентным d-расширением (сверхразрешимым d-расширением) $\mathfrak{F}_i$ в $\mathfrak{F}_\beta$, если $\mathfrak{F}_i$ инвариантно в $\widetilde{\mathfrak{F}}_i$ и $\widetilde{\mathfrak{F}}_i / \mathfrak{F}_i$ — нильпотентная группа (сверхразрешимая группа) порядка d; группы Шмидта — минимальные не нильпотентные группы ([10]); максимальная подгруппа — при $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$ — истинная подгруппа $\mathfrak{G}$ (т. е. $\neq \mathfrak{G}$), не являющаяся истинной подгруппой никакой истинной подгруппы $\mathfrak{G}$ (а при $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ — сама $\mathfrak{E}$); $E(\mathfrak{G}, n, \mathfrak{A}, a)$ — $\mathfrak{G}$ имеет нильпотентную подгруппу $\mathfrak{A}$ и $|\mathfrak{A}| = a$; $E(\mathfrak{G}, n, a)$ — $\mathfrak{G}$ имеет нильпотентную подгруппу порядка a.

§ 3. Определение 1. Пусть r и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ — натуральные числа и пусть $H_i = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $H = H_m$ назовем последовательностью вида rC, или rC-последовательностью, если для любого $i = 1, \ldots, m$ и любого примарного делителя d_i числа (δ_i, r) из $d_i > 1$ следует $(d_i - 1, \overline{H}_i) = 1$. При $m = 1$ rC-последовательность назовем rC-числом. В обозначениях rC-последовательность и rC-число условимся опускать r при $r = \delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$. Пустую последовательность отнесем тоже к типу rC.

Теорема 1. *Пусть d — любое натуральное число. Если kdC-последовательность (C-последовательность) H является подпоследовательностью последовательности всех индексов некоторого инвариантного ряда R группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ имеет нильпотентную подгруппу $\mathfrak{H}$ порядка $\overline{H}$. Если $(\overline{H}, k) = 1$ или если $\overline{H}$ свободно от кубов простых чисел, то $\mathfrak{H}$ — абелева. Если R — главный ряд $\mathfrak{G}$, то все члены H — примарные числа.*

Доказательство. Очевидно, что теорему достаточно доказать для случая, когда H есть kC-последовательность, а ряд R — главный. По условию, каждый член h из H есть kC-число. Отсюда, учитывая, что порядок коммутанта соответствующей h фактор-группы ряда R делит k, заключаем по нашей теореме I, что эта фактор-группа будет нильпотентной группой. Но, как фактор главного ряда, она элементарная. Тогда ее порядок h — примарное число. Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — контрпример наименьшего порядка к доказываемой теореме и пусть H — та kC-последовательность, для которой в $\mathfrak{G}$ нет соответствующей подгруппы. Тогда $\overline{H} > 1$, т. е. $|\mathfrak{G}| > 1$. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{E}$ — ряд R и пусть $|\mathfrak{G}_{\lambda-1}| = h_\lambda$. Конечно, $h_\lambda > 1$.

1) $h_\lambda \in H$. Теорема, очевидно, верна для $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ относительно kC-последовательности $H \setminus \{h_\lambda\}$. Поэтому $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ содержит нильпотентную подгруппу $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ порядка $\overline{H} / h_\lambda$. По предыдущему, $h_\lambda = q^\omega$, $\omega > 0$, q — простое число. Если $\overline{H} / h_\lambda = 1$, то $H = \{h_\lambda\}$ и $\mathfrak{G}_{\lambda-1}$ будет искомой нильпотентной подгруппой. Пусть $\overline{H} / h_\lambda > 1$ и p — произвольный простой делитель числа $\overline{H} / h_\lambda$. Так как $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ — нильпотентная группа, то ее p-силовская подгруппа $\mathfrak{P} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ порядка p^α, $\alpha > 0$, инвариантна в ней. Тогда $\mathfrak{P}$ порядка $p^\alpha q^\omega$ инвариантна в $\mathfrak{N}$. Пусть $p \neq q$. Если p-силовская подгруппа из $\mathfrak{P}$ инвариантна в ней, то она будет инвариантной p-силовской подгруппой из $\mathfrak{N}$. Пусть p-силовская подгруппа из $\mathfrak{P}$ не инвариантна в ней. Тогда, по 2) теоремы 3.2, из ([11]), следует, что $\mathfrak{P}$ содержит p-нильпотентную группу Шмидта $\mathfrak{S}$ порядка $p^{\alpha_1} q^{\omega_1}$, α_1, $\omega_1 > 0$. По лемме 1 из ([1]), q^{ω_1} — порядок коммутанта $\mathfrak{S}$, поэтому q^{ω_1} делит k. По условию, $h_\lambda = q^\omega \in H$ и p делит $\overline{H} / h_\lambda$. Отсюда, учитывая, что H есть kC-последовательность, следует, что $q^x \not\equiv 1 \pmod p$ для всех $1 \leqslant x \leqslant \varphi_1$. Но тогда p-силовская подгруппа из $\mathfrak{S}$ инвариантна в ней, что невозможно. Пусть $p = q$. Тогда $\mathfrak{P}$ будет инвариантной q-силовской подгруппой в $\mathfrak{N}$. Итак, $E(\mathfrak{G}, n, \mathfrak{N}, \overline{H})$. Противоречие.

2) $h \in H$. Очевидно, теорема верна для $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ относительно kC-последовательности H. Поэтому $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ содержит нильпотентную подгруппу $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ порядка $\overline{H} > 1$. Для $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$, очевидно, можно построить главный ряд с невозрастающей последовательностью простых индексов F, причем $\overline{F} = \overline{H}$.

2.1) Существует максимальная подгруппа $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{N}$, не содержащая $\mathfrak{G}_{\lambda-1}$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{G}_{\lambda-1}$. В силу $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1} \cong \mathfrak{M} / \mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ и $|\mathfrak{M}| < |\mathfrak{G}|$ теорема для $\mathfrak{M}$ верна относительно указанной выше kC-последовательности F. Поэтому $E(\mathfrak{M}, n, F)$, $\overline{F} = \overline{H}$. Противоречие.

2.2) $\mathfrak{G}_{\lambda-1}$ входит в каждую максимальную подгруппу $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{M} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ будет максимальной подгруппой группы $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$. Но $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ — нильпотентная группа, поэтому $\mathfrak{M} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ инвариантна в ней. Это означает, что все максимальные подгруппы $\mathfrak{N}$ инварианты в ней. Тогда ([6]) группа $\mathfrak{N}$ порядка $\overline{H} h_\lambda$ — нильпотентная группа, и поэтому $E(\mathfrak{N}, n, \overline{H})$. Противоречие. Утверждения об абелевости подгруппы порядка $\overline{H}$ очевидны.

Теорема. 2. *Если невозрастающая последовательность простых чисел P является подпоследовательностью последовательности всех индексов некоторого главного ряда группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ имеет нильпотентную подгруппу порядка $\overline{P}$.*

Доказательство. Применяем к P теорему 1.

§ 4. Пусть R_i: $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^{(0)} \supseteq \mathfrak{F}_i^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{F}_i^{(\nu_i)} = \mathfrak{G}_i$, $i = \beta, \ldots, \nu$ — ряд инвариантных подгрупп факториальной подгруппы $\mathfrak{F}_i$ и Φ_i — некоторая подпоследовательность последовательности всех факторов инвариантного ряда подгрупп R_i (Φ_i может быть, в частности, пустым). Пусть еще a_i — последовательность порядков всех членов Φ_i. Числители и знаменатели всех фактор-групп из Φ_i образуют подпоследовательность A_i последовательности R_i. Последовательность подгрупп A_i назовем вставкой типа a_i группы $\mathfrak{F}_i$. Числитель и знаменатель каждого члена Φ_i назовем диадой из вставки A_i. Пусть $A_i^* = A_\beta \cup A_{\beta+1} \cup \ldots \cup A_i$ и $a_i^* = a_\beta \cup a_{\beta+1} \cup \ldots \ldots \cup a_i$. Тогда A_i^* назовем вставкой типа a_i^* (ряда R_f или группы $\mathfrak{G}$). Будем считать a_i^* заданным, если для $j = \beta, \ldots, i$ указана вставка A_i с подразделением ее на диады. При $i = \nu$ положим $A_\nu^* = A$ и $a_\nu^* = a$. Диаду из любой A_i будем называть и диадой из A. При $i < \nu$ можно A_i^* считать таким A, у которого $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_\nu$ пусты.

Определение 2. Вставку A_i^*, $i = \beta, \ldots, \nu$, назовем r-вставкой (сверхразрешимой вставкой), если: 1) a_i^* есть rC-последовательность (последовательность простых чисел); 2) если $i > \beta$, то при $j = \beta + 1, \ldots, i$ любая подгруппа из A_j инвариантна в любом нильпотентном $\overline{a_{j-1}^*}$-расширении (сверхразрешимом $\overline{a_{j-1}^*}$-расширении) подгруппы $\mathfrak{F}_j$ в $\mathfrak{F}_\beta$.

Определение 3. Тип a_i^* kd-вставки (сверхразрешимой вставки) A_i^*, $i = \beta, \ldots, \nu$, назовем нильпотентной (сверхразрешимой) последовательностью индексиала h группы $\mathfrak{G}$ (d — натуральное).

Интересен по своей простоте случай $kd = |\mathfrak{G}|$, не требующий знания числа k.

Пример нильпотентной последовательности a получится, если при $i = \beta, \ldots, \nu$ все подгруппы из A_i характеристические для $\mathfrak{F}_i$ и a — невозрастающая последовательность простых чисел. Тогда a — нильпотентная последовательность. Так, если все факторы индексиала h — циклические и для каждого $i > \beta$ наибольший простой делитель числа f_i не больше наименьшего простого делителя числа f_{i-1}, то $h = \bar{a}$. Такой индексиал назовем циклически невозрастающим.

§ 5. Теорема 3. *Если a — нильпотентная сверхразрешимая последовательность индексиала h группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ имеет нильпотентную сверхразрешимую подгруппу $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_\beta$ порядка $\bar{a}$.*

Доказательство. Докажем сначала теорему для случая нильпотентных последовательностей. Пусть $\mathfrak{G}$ — контрпример наименьшего порядка к доказываемой теореме. Тогда $\mathfrak{G}$ не имеет нильпотентной подгруппы порядка $\bar{a}$, где a — тип некоторой kd-вставки A некоторого ряда вида R_f. Это значит, что $\bar{a} > 1$, почему и $|\mathfrak{G}| > 1$. Тогда в ряде R существует $\mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{E}$ с наименьшим номером λ. Поэтому $\mathfrak{G}_{\lambda-1} \neq \mathfrak{E}$ и $\bar{a}_{\lambda+1} = \bar{a}_{\lambda+2} = \ldots = \bar{a}_\nu = 1$. При $\beta = \lambda$ будет $\bar{a} = \bar{a}_\beta$, где a_β есть kdC-последовательность некоторых индексов инвариантного ряда A_λ группы $\mathfrak{F}_\lambda$. По теореме 1, $E(\mathfrak{F}_\lambda, n, \bar{a})$. Противоречие. Значит, $\beta \leqslant \lambda - 1$. Пусть L: $\mathfrak{F}_\beta \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ участок ряда R_f, уплотненный r-вставкой $A_{\lambda-1}^*$ типа $a_{\lambda-1}^*$ (r — любое). Разлагая все члены L по $\mathfrak{G}_{\lambda-1}$, мы получим ряд M: $\mathfrak{F}_\beta / \mathfrak{G}_{\lambda-1} \supseteq \ldots \ldots \supseteq \mathfrak{G}_{\lambda-1} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$.

Прямая проверка показывает, что верно (α): если ряд L имеет r-вставку типа $a_{\lambda-1}^*$, то и M имеет r-вставку того же типа.

а) $|\mathfrak{F}_\lambda| = 1$. Учитывая ($\alpha$) при $r = kd$ и то, что порядок коммутанта группы $\mathfrak{F}_\beta / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ делит k и $|\mathfrak{F}_\beta / \mathfrak{G}_{\lambda-1}| < |\mathfrak{G}|$, видим, что теорема для $\mathfrak{F}_\beta / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ справедлива относительно $a_{\lambda-1}^*$. Поэтому $E(\mathfrak{F}_\beta / \mathfrak{G}_{\lambda-1}, n, \mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}, \overline{a_{\lambda-1}^*})$. Но, ввиду $\mathfrak{F}_\lambda = \mathfrak{E}$, $\bar{a}_\lambda = 1$. Поэтому $\overline{a_{\lambda-1}^*} = \bar{a}$, т. е. $|\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}| = \bar{a}$. Тогда $\mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ имеет главный ряд с невозрастающей последовательностью простых индексов, т. е. $\mathfrak{N}$ имеет проходящий через $\mathfrak{G}_{\lambda-1}$ инвариантный ряд, имеющий на участке от $\mathfrak{N}$ до $\mathfrak{G}_{\lambda-1}$ невозрастающую последовательность простых индексов, произведение которых равно $\bar{a}$. Отсюда по теореме 2, заключаем, что $E(\mathfrak{N}, n, \bar{a})$. Противоречие.

б) $|\mathfrak{F}_\lambda| > 1$ и $\mathfrak{F}_\lambda$ инвариантно в $\mathfrak{F}_\beta$. Как и в случае а) убеждаемся в наличие $E(\mathfrak{F}_\beta / \mathfrak{G}_{\lambda-1}, n, \mathfrak{N} / \mathfrak{G}_{\lambda-1}, \overline{a_{\lambda-1}^*})$ и инвариантного ряда $\mathfrak{N} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{G}_{\lambda-1} \supseteq \supseteq \mathfrak{F}_\lambda \supseteq \mathfrak{G}$, у которого от $\mathfrak{N}$ до $\mathfrak{G}_{\lambda-1}$ все индексы образуют невозрастающую последовательность σ простых чисел, причем $\bar{\sigma} = \bar{a}^{*}_{\lambda-1}$. Но тогда σ будет и последовательностью индексов инвариантного ряда $\mathfrak{N} / \mathfrak{F}_\lambda \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{G}_{\lambda-1} / \mathfrak{F}_\lambda \supseteq \mathfrak{F}_\lambda / \mathfrak{F}_\lambda$ на участке от $\mathfrak{N} / \mathfrak{F}_\lambda$ до $\mathfrak{G}_{\lambda-1} / \mathfrak{F}_\lambda$. Отсюда, по теореме 2, заключаем, что $E(\mathfrak{N} / \mathfrak{F}_\lambda, n, \mathfrak{N}^* / \mathfrak{F}_\lambda, \bar{a}^{*}_{\lambda-1})$. Тогда существует инвариантный ряд S: $: \mathfrak{N}^* \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{F}_\lambda \supseteq \mathfrak{G}$ с последовательностью индексов σ на участке от $\mathfrak{N}^*$ до $\mathfrak{F}_\lambda$. Уплотним ряд S на участке от $\mathfrak{F}_\lambda$ до $\mathfrak{C}$ kd-вставкой A_λ и получим ряд S^*. Все подгруппы из A_λ, согласно 2) определения 2, будут инвариантны в $\mathfrak{N}^*$. Далее, последовательность тех индексов ряда A_λ, которые входят в a_λ, будет состоять, согласно определению 1 и 1) определения 2, из чисел δ_j со следующим свойством: любой примарный > 1 делитель d_j числа (δ_j, kd) таков, что $(d_j - 1, \bar{a}^{*}_{\lambda-1}\bar{a}_{\lambda j}) = 1$, где $a_{\lambda j}$ обозначает последовательность всех членов из a_λ, которые предшествуют δ_j, и самого δ_j. Но $\bar{a}^{*}_{\lambda-1} = \bar{\sigma}$. Тогда $(d_j - 1, \bar{\sigma}\bar{a}_{\lambda j}) = 1$. Это показывает, что последовательность $\bar{H}$, составленная из всех индексов ряда S^*, на участке от $\mathfrak{N}^*$ до $\mathfrak{F}_\lambda$ и всех входящих в a_λ индексов ряда A_λ, будет kdC-последовательностью, причем $\bar{H} = \bar{\sigma}\bar{a}_\lambda = \bar{a}^{*}_{\lambda-1}\bar{a}_\lambda = \bar{a}$. Применяя теорему 1, видим, что $E(\mathfrak{N}^*, n, \bar{a})$. Противоречие.

в) $|\mathfrak{F}_\lambda| > 1$ и $\mathfrak{F}_\lambda$ не инвариантна в $\mathfrak{F}_\beta$. Пусть $\mathfrak{B}$ — нормализатор $\mathfrak{F}_\lambda$ в $\mathfrak{F}_\beta$. Тогда (7) $\mathfrak{F}_\beta = \mathfrak{B}\mathfrak{G}_{\lambda-1}$ и существует изоморфизм φ группы $\mathfrak{F}_\beta / \mathfrak{G}_{\lambda-1}$ на $\mathfrak{B} / \mathfrak{B}_{\lambda-1}$, где $\mathfrak{B}_{\lambda-1} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{G}_{\lambda-1}$. Применяя φ к членам ряда M, получим ряд N: $\mathfrak{B} / \mathfrak{B}_{\lambda-1} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{B}_\lambda / \mathfrak{B}_{\lambda-1}$. $\mathfrak{B} / \mathfrak{B}_{\lambda-1} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{B}_{\lambda-1} / \mathfrak{B}_{\lambda-1}$.

Учитывая (α) при $r = kd$, видим, что M имеет kd-вставку типа $a_{\lambda-1}^*$. Но тогда, очевидно, что и N имеет kd-вставку того же типа, причем k, очевидно, делится на порядок коммутанта группы $\mathfrak{B} / \mathfrak{B}_{\lambda-1}$. Так как $\mathfrak{F}_\lambda$ не инвариантна в $\mathfrak{F}_\beta$, то $|\mathfrak{B}| < |\mathfrak{G}|$, и теорема выполняется для $\mathfrak{B} / \mathfrak{B}_{\lambda-1}$ относительно $a_{\lambda-1}^*$. Поэтому $E(\mathfrak{B} / \mathfrak{B}_{\lambda-1}, n, \mathfrak{N} / \mathfrak{B}_{\lambda-1}, \bar{a}^{*}_{\lambda-1})$. Тогда существует инвариантный ряд $\mathfrak{N} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{B}_{\lambda-1} \supseteq \mathfrak{F}_\lambda \supseteq \mathfrak{C}$, у которого на участке от $\mathfrak{N}$ до $\mathfrak{B}_{\lambda-1}$ индексы образуют невозрастающую последовательность σ простых чисел. Но тогда σ будет и последовательностью индексов инвариантного ряда $\mathfrak{N} / \mathfrak{F}_\lambda \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{B}_{\lambda-1} / \mathfrak{F}_\lambda \supseteq \mathfrak{F}_\lambda / \mathfrak{F}_\lambda$ на участке от $\mathfrak{N} / \mathfrak{F}_\lambda$ до $\mathfrak{B}_{\lambda-1} / \mathfrak{F}_\lambda$. Отсюда, по теореме 2, следует, что $E(\mathfrak{N} / \mathfrak{F}_\lambda, n, \mathfrak{N}^* / \mathfrak{F}_\lambda, \bar{a}^{*}_{\lambda-1})$. Мы теперь можем применить к $\mathfrak{N}^* / \mathfrak{F}_\lambda$ рассуждения из б) и, учитывая, что $\mathfrak{N}^* \subseteq \mathfrak{F}_\beta$, придем к противоречию. Для случая, когда a — сверхразрешимая последовательность, необходимо повторить предыдущие рассуждения, заменив в них всюду нильпотентность на сверхразрешимость; kdC-последовательность — на последовательность простых чисел; kdC-вставки — на сверхразрешимые вставки; невозрастающую последовательность простых чисел — на последовательность простых чисел; ссылки на теорему 2 — ссылками на теорему Л. А. Шеметкова (8) (следствие).

Теорема 4. *Если h — циклически невозрастающий индексиал группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ имеет нильпотентную подгруппу порядка h.*

Доказательство. Как было показано выше, такой индексиал $h = \bar{a}$, где a есть нильпотентная последовательность. Следовательно, можно к нему применить теорему 3.

Теоремы 3 и 4 являются аналогами теорем 1, 4, и 5 из (7). Для теорем 2, 3 и 5 из (7) тоже можно указать соответствующие аналоги.

Гомельская лаборатория Института математики
Академии наук БССР
Гомельский государственный университет

Поступило
6 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, Матем. сборн., 36, № 2, 135 (1929). [2] G. Pazderski, Arch. Math., 10, 331 (1959). [3] С. А. Чунихин, Матем. сборн., 40, № 1, 39 (1933); 4 (46), № 3, 521, (1938). [4] И. К. Чунихина, С. А. Чунихин, Матем. сборн., 15 (57), № 2, 325 (1944). [5] С. А. Чунихин, Матем. сборн., 55, (97), № 2, 101 (1961); Am. Math. Soc. Transl., (2), 45, 79 (1965). [6] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 33, 161 (1926). [7] С. А. Чунихин, ДАН, 177, № 5, 1026 (1967). [8] Л. А. Шеметков, Докл. АН БССР, 12, 969 (1968). [9] С. А. Чунихин, Матем. сборн., 39 (81), № 4, 465 (1956); 50 (92), № 3, 383 (1960); Am. Math. Soc. Transl., (2), 45, 71 (1965). Матем. сборн., 54 (96), № 2, 237 (1961). [10] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 31, 366 (1924). [11] С. А. Чунихин, Матем. сборн., 62 (104), № 1, 76 (1963).