Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 2

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

А. В. ГОНЧАРСКИЙ, А. Г. ЯГОЛА

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\int\limits_a^b K(x, s)\,dg(s) = u(x)$

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 9 I 1970)

В настоящей работе рассматривается вопрос о решении задачи

$$A[x, g(s)] = \int\limits_a^b K(x, s)\,dg(s) = u(x);$$
$$g(a) = 0; \quad g(s) \in G; \quad u(x) \in U; \qquad a \leqslant s \leqslant b, \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{1}$$

где $u(x)$ — заданная, а $g(s)$ — искомая функции, принадлежащие некоторым функциональным пространствам U и G соответственно. Пусть ядро уравнения (1) $K(x, s)$ ограничено и непрерывно на прямоугольнике $[ab] \times [cd]$, и пусть для некоторой $\bar{u}(x) \in U$ существует и притом единственная функция $\bar{g}(s) \in G$ такая, что $A[x, \bar{g}(s)] = \bar{u}(x)$ и $\bar{g}(a) = 0$. Очевидно, что если G есть пространство непрерывных функций с закрепленным левым концом, то задача (1) некорректно поставлена [1].

1. Пусть дана некорректная задача (1) и известно, что точное решение задачи $\bar{g}(s)$, соответствующее $\bar{u}(x)$, есть монотонная (для определенности неубывающая), ограниченная и обращающаяся в 0 в точке a функция (для устранения неоднозначности будем полагать значения функции во всех ее внутренних точках разрыва равными предельным значениям, например, справа). Пусть также известно, что на множестве монотонных функций с закрепленным левым концом решение задачи (1) для $u(x) = \bar{u}(x)$ единственно.

Введем множество $G\uparrow$, элементами которого являются неубывающие функции $g(s)$, причем: а) $g(a) = 0$; б) $\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b} |g(s)| < \infty$, а также множество функций $G\uparrow(\bar{u}, \delta)$, элементами которого являются функции из $G\uparrow$, удовлетворяющие неравенству

$$\|A[x, g(s)] - \bar{u}(x)\|_U \leqslant \delta. \tag{2}$$

Теорема 1. *Существует $\delta_0(A; \bar{g})$ такое, что для всех $\delta < \delta_0$ множество $G\uparrow(\bar{u}, \delta)$ заключено внутри шара радиуса 2 (шар в метрике C).* (Далее везде для определенности полагаем $\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b} |\bar{g}(s)| = 1$.)

Доказательство. а) Легко видеть, что множество $G\uparrow(\bar{u}, \delta)$ при каждом фиксированном δ выпукло. Из выпуклости множества $G\uparrow(\bar{u}, \delta)$, очевидно, следует выпуклость числового множества значений функций из $G\uparrow(\bar{u}, \delta)$ в точке b.

б) Предположим, что найдется такая последовательность δ_k, для которой множество $G\uparrow(\bar{u}, \delta_k)$ при каждом фиксированном δ_k не содержится в шаре радиуса 2. Из а) и б) следует, что при каждом фиксированном δ_k в $G\uparrow(\bar{u}, \delta_k)$ существует функция $\tilde{g}_{\delta_k}$ такая, что $\tilde{g}_{\delta_k}(b) = 2$. Но тогда из множества $\{\tilde{g}_{\delta_k}\}$ по теореме Хелли [2] можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $\bar{\bar{g}}(s)$, принадлежащей тому же множеству и $\bar{\bar{g}}(b) = 2$. Переходя к пределу в неравенстве $\|A[x, g_{\delta_k}(s)] - \bar{u}(x)\|_U \leqslant \delta_k$, получим, что $\|A[x, \bar{\bar{g}}] - \bar{u}(x)\|_U = 0$. Последнее противоречит единственности решения задачи (1).

Теорема 2. *Пусть последовательность $\delta_k \to 0$. Тогда последовательность g_{δ_k}, где g_{δ_k} — произвольный элемент $G\uparrow(\bar{u}, \delta_k)$, сходится к $\bar{g}(s)$ — точному решению (1) везде на $[a, b]$.*

Из теорем 1 и 2 следует

Замечание 1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_0(\varepsilon, A, \bar{g}(s))$, что при всех $\delta < \delta_0$ и любой функции $\tilde{g}_\delta \in G\uparrow(\bar{u}, \delta)$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{g}_\delta - \bar{g}\|_{L_p} < \varepsilon.$$

Теорема 3. *Пусть* $\bar{g}(s) \in C_1$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta_0(\varepsilon, A, \bar{g}(s))$, *что для всех* $\tilde{g}_\delta(s) \in G\uparrow(\bar{u}, \delta)$ $\|\tilde{g}_\delta(s) - \bar{g}(s))\|_C \leqslant \varepsilon$ *как только* $\delta < \delta_0$.

2. Обычно при решении задачи (1) известно не точное значение $\bar{u}(x)$, а некоторые (полученные, скажем, из эксперимента) $\tilde{u}_\delta(x)$ и $\delta > 0$ такие, что $\|\tilde{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\|_U \leqslant \delta$.

Введем множество U_δ, элементами которого являются функции $\tilde{u}_\delta(x)$, для которых $\|\tilde{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\|_U \leqslant \delta$, и множество $G\uparrow(\tilde{u}_\delta, \delta) \subset G\uparrow$, элементами которого являются функции $\tilde{g}_\delta(s) \in G\uparrow$, удовлетворяющие неравенству $\|A[x, \tilde{g}_\delta(s)] - \tilde{u}_\delta(x)\|_U \leqslant \delta$ для любой фиксированной $\tilde{u}_\delta(x) \in U_\delta$.

Лемма 1. *Множество* $G\uparrow(\tilde{u}_\delta, \delta) \subset G\uparrow(\bar{u}, 2\delta)$.

Действительно, из $\|A[x, \tilde{g}_\delta(s)] - \tilde{u}_\delta(x)\|_U \leqslant \delta$ и $\|\tilde{u}_\delta(x) - \bar{u}(x)\|_U \leqslant \delta$ следует, что $\|A[x, \tilde{g}_\delta(s)] - \bar{u}(x)\|_U \leqslant 2\delta$.

Из леммы 1 следует, что все сформулированные выше теоремы справедливы и для элементов множеств $G\uparrow(\tilde{u}_\delta, \delta)$.

Замечание 2. В силу того что теорема Хелли справедлива как для конечных промежутков, так и для бесконечных, теоремы 1 и 2 справедливы, например, в случае, когда $a = c = -\infty$, $b = d = +\infty$, если на $K(x, s)$ наложить дополнительное ограничение: при каждом фиксированном x $K(x, \pm\infty) = 0$.

3. Для практического отыскания приближенного решения достаточно найти любую функцию из $G\uparrow(\tilde{u}_\delta, \delta)$, т. е.

$$\|A[x, \tilde{g}_\delta(s)] - \tilde{u}_\delta(x)\|_U \leqslant \delta, \quad \tilde{g}_\delta(s) \in G\uparrow, \tag{3}$$

что после перехода к разностной схеме приводит к обычной задаче выпуклого программирования ([3]). Единственное отличие состоит в том, что не нужно искать минимум функционала $\|A[x, g(s)] - \tilde{u}_\delta(x)\|_U$, а достаточно строить минимизирующую последовательность до тех пор, пока не найдется функция, удовлетворяющая соотношению (3). Для построения минимизирующей последовательности могут быть применены методы, совершенно аналогичные тем, которые были использованы авторами при решении интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множестве монотонных ограниченных функций ([4], [5]).

Совершенно очевидно, что оценка погрешности приближенного решения задачи (1) в силу выпуклости множества приближенных решений может производиться так же, как оценка погрешности приближенного решения, описанная в ([4], [5]), а практические методы нахождения погрешности аналогичны методам, описанным в ([5]).

Изложенная методика может найти широкое применение для задач математической статистики (например, для нахождения спектральной функции шума по функции корреляции), в задачах радиоастрономии для нахождения потоков радиоизлучения от небесных радиоисточников и т. д.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить акад. А. Н. Тихонова за руководство работой и В. Б. Гласко, а также Е. М. Никишина за неоднократные обсуждения настоящей работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3, 501 (1963). [2] Э. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, 2, М., 1961. [3] С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева, Линейное и выпуклое программирование, М., 1964. [4] А. В. Гончарский, А. Г. Ягола, ДАН, 184, № 4, 771 (1969). [5] А. М. Черепащук, А. В. Гончарский, А. Г. Ягола, Астр. журн., 45, № 6 (1968).