Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 517.948.32 *МАТЕМАТИКА*

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 30 I 1970)

Рассматривается следующее обобщение интегральных уравнений типа свертки:

$$H\varphi \equiv a_0(t)\varphi(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\int_{-\infty}^{\infty} b_j(\tau)h_j(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{1}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $h_j(t) \in \mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$, $a_j(t)$ и $b_j(t)$ — ограниченные измеримые функции, причем $|a_0(t)| \geqslant c > 0$; $\varphi(t), f(t) \in E$ *.

Различные частные случаи уравнения (1) (в основном случаи кусочно-постоянных коэффициентов) изучались, например, в [2–6]. Общее уравнение вида (1) при $b_j(t) \equiv 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, исследовалось Л. С. Раковщиком [1] в предположении, что $\varphi(t), f(t) \in \mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$, $p > 1$.

В этой заметке обобщаются результаты работы [1] на оператор H в случае любого из пространств E. Полученные результаты применяются к исследованию одного класса интегральных уравнений вида

$$K\psi \equiv \psi(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\int_0^a d_j(y)k_j(x, y)\psi(y)\,dy = g(x), \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

где $k_j(x, y)$ — однородные функции произвольных порядков α_j; $c_j(x)$, $d_j(x)$ принадлежат некоторым подклассам ограниченных измеримых функций. Будут найдены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора K в серии весовых пространств E_β и вычислен индекс. Отметим, что уравнение (2) при $\alpha_j = -1$, $c_j(x), d_j(x) \in C(0, a)$ входит в класс уравнений, изученных Л. Г. Михайловым в [12].

n° 1. Введем пространства $M_0^{\sup}$, M_0^{mes}, $M^{\sup}$, M^{mes} ограниченных измеримых функций

$$M^{\sup} = M_0^{\sup} \oplus X, \quad M^{\text{mes}} = M_0^{\text{mes}} \oplus X,$$
$$M_0^{\sup} = \{\varphi(t)\,|\,\varphi(t) \in M;\ \lim_{n\to\infty}\sup_{|t|>n}|\varphi(t)| = 0\},$$
$$M_0^{\text{mes}} = \{\varphi(t)\,|\,\varphi(t) \in M;\ \lim_{n\to\infty}\text{mes}\,(t: |\varphi(t)| > \varepsilon, |t| > n;\ \varepsilon > 0) = 0\},$$

где X — двумерное пространство с базисом $\theta(x)$, $\theta(-x)$, $\theta(x) = {}^1/_2(1 + \text{sign}\,x)$. Очевидно, $\varphi(t) \in M^{\sup}$ (или M^{mes}) тогда и только тогда, когда существуют постоянные $c_\pm$ такие, что $\theta(\pm t)[\varphi(t) - c_\pm] \in M_0^{\sup}$ (или M_0^{mes} соответственно). Постоянные $c_\pm$ будем называть (обобщенными) значениями ограниченной измеримой функции на бесконечности: $c_\pm = \varphi(\pm\infty)$ (ср. [1]).

* Отметим, что к серии E банаховских пространств $\mathscr{L}_p$, M, M^u, M^c, C, C^0 [7] мы добавим еще важные для нас подпространства $M^{\sup}$, M^{mes} ограниченных измеримых функций, имеющих (в определенном смысле) значения на бесконечности.

Отметим следующие свойства классов $M_0^{\sup}$, M_0^{mes}, $M^{\sup}$, M^{mes}: 1) они полны по норме M; 2) функции из M^{mes} непрерывны по мере на всей оси; 3) $\varphi(t) \in M_0^{\sup}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t)$ имеет мажоранту из C^0: $|\varphi(t)| \leqslant a(t) \in C^0$; 4) функции ограниченной вариации (на замкнутой оси) принадлежат $M^{\sup}$; 5) $M \cap \mathscr{L}_p \subset M_0^{\mathrm{mes}}$ при любом $p \geqslant 1$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $E = \mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_p$, M, $M^{\sup}$, M^{mes}, $M_0^{\sup}$, M_0^{mes}, M^u, M^c, C, C^0, причем пространства $E = M^u$, M^c, C, C^0 непрерывных функций будут пониматься в следующем смысле: $E = E_+ \oplus E_-$ (см. ([8])).

Лемма 1. *Если $h(t) \in \mathscr{L}_1$, то оператор свертки $A\varphi = h * \varphi$ действует из M^{mes} в C и из M_0^{mes} в C^0.*

n°. 2. Положим, не ограничивая общности, $a_0(t) \equiv 1$. Пусть $a_j(t)$, $b_j(t) \in M^{\mathrm{mes}}$. Представим оператор H в виде

$$H\varphi = \Pi\varphi + T_1\varphi + T_2\varphi, \tag{3}$$

где

$$\Pi\varphi = \begin{cases} \varphi(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(\infty) b_j(\infty) h_j(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, & t > 0, \\ \varphi(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(-\infty) b_j(-\infty) h_j(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, & t < 0. \end{cases}$$

парный оператор, а

$$T_1\varphi = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j(h_j * b_j\varphi) + \sum_{j=1}^{n} (a_j - \tilde{a}_j)(h_j * \tilde{b}_j\varphi),$$

$$\tilde{a}_j(t) = a_j(t) - a_j(\infty)\theta(t) - a_j(-\infty)\theta(-t); \quad \tilde{b}_j(t) = b_j(t) - b_j(\infty)\theta(t) - b_j(-\infty)\theta(-t),$$

$$T_2\varphi = \sum_{j=1}^{n} (b_j(\infty) - b_j(-\infty)) a_j(-\infty)\theta(-t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) h_j(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \sum_{j=1}^{n} (b_j(\infty) - b_j(-\infty)) a_j(\infty)\theta(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(-\tau) h_j(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Операторы вида T_2 вполне непрерывны ([9, 10]) во всех пространствах E. Для широкого класса коэффициентов это верно и по отношению к оператору T_1. Именно, справедлива

Лемма 2. *Оператор $T\varphi = a(h * b\varphi)$, $h(t) \in \mathscr{L}_1$, $a(t)$, $b(t) \in M$, вполне непрерывен в пространстве E, если:*

1) *либо*

$$a(t) \in \begin{cases} M_0^{\mathrm{mes}} & \text{при } E = \mathscr{L}_p\ (p \geqslant 1), \\ M_0^{\sup} & \text{при } E = M,\ M_0^{\sup},\ M_0^{\mathrm{mes}},\ M^{\sup},\ M^{\mathrm{mes}}, \\ C_0 & \text{при } E = M^u,\ M^c,\ C,\ C^0; \end{cases} \tag{4}$$

2) *либо*

$$b(t) \in \begin{cases} M_0^{\sup} & \text{при } E = \mathscr{L}_1, \\ M_0^{\mathrm{mes}} & \text{для остальных } E; \end{cases} \tag{5}$$

$$a(t) \in C, \quad \text{если} \quad E = M^u,\ M^c,\ C,\ C^0.$$

При $b(t) \equiv 1$, $a(t) \in M_0^{\mathrm{mes}}$, $E = \mathscr{L}_p$ $(p > 1)$ утверждение леммы 2 получено в ([1]).

В силу полной непрерывности операторов T_1, T_2 из (3) получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть $h_j(t) \in \mathscr{L}_1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и пусть $a_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, и $b_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют соответственно усло-*

виям (4), (5), *в которых опущен индекс* 0*. *Тогда необходимое и достаточное условие нётеровости оператора H в E имеет вид*

$$\sigma(\lambda)^{\pm} = a_0(\pm\infty) + \sum_{j=1}^{n} a_j(\pm\infty)\, b_j(\pm\infty)\mathcal{H}_j(\lambda) \neq 0, \quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty,$$

где $\mathcal{H}_j(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_j(t)\, e^{it\lambda}\, dt$. *При выполнении этих условий*

$$\varkappa_E(H) = -\frac{1}{2\pi}\Delta\left[\arg\frac{\sigma(\lambda)^+}{\sigma(\lambda)^-}\right]_{-\infty}^{\infty}.$$

Используя один результат из теории линейных операторов ([5], лемма 1), приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Оператор H имеет во всех пространствах E одни и те же нули и одни и те же условия разрешимости* **, *если выполнено одно из следующих условий*:

1) $a_j(t) \in M^{\mathrm{mes}}$, $b_j(t) \in M^{\mathrm{mes}}$, $E = \mathcal{L}_p (p > 1)$;

2) $a_j(t) \in M^{\mathrm{mes}}$, $b_j(t) \in M^{\mathrm{sup}}$, $E = \mathcal{L}_p (p \geqslant 1)$;

3) $a_j(t) \in M^{\mathrm{sup}}$, $b_j(t) \in M^{\mathrm{sup}}$, $E = \mathcal{L}_p (p \geqslant 1)$, M, M_0^{mes}, M_0^{sup}, M^{mes}, M^{sup};

4) $a_j(H \in M^{\mathrm{sup}}$, $b_j(t) \in M^{\mathrm{mes}}$, $E = \mathcal{L}_p (p > 1)$, M, M_0^{mes}, M_0^{sup}, M^{mes}, M^{sup};

5) $a_j(t) \in C$, $b_j(t) M^{\mathrm{mes}}$; *E — любое, кроме, быть, может $\mathcal{L}_1$*;

6) $a_j(t) \in C$, $b_j(t) \in M^{\mathrm{sup}}$, *$E$ — любое.*

n° 3. В уравнении (2) будем предполагать (ср. ([11])), что существует такое число β, что

$$\int\limits_0^{\infty} |k_j(1, y)|\, y^{-\beta}\, dy < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Используя известный ([13], стр. 396) прием, приводим уравнение (2) с помощью отображения $x = ae^{-t}$, $y = ae^{-\tau}$, $\varphi(t) = e^{-\beta t}\psi(x)$, $f(t) = e^{-\beta t} g(x)$ к уравнению на полуоси вида (1). При этом

$$h_j(t) = a^{1+\alpha_j} e^{(1-\beta)t} k_j(1, e^t) \in \mathcal{L}_1,$$

$$a_j(t) = \theta(t)\, c_j(ae^{-t})\, e^{-(1+\alpha_j)t}, \qquad b_j(t) = \theta(t)\, d_j(ae^{-t}).$$

Указанное отображение устанавливает изометрию между пространством $E(0, \infty)$ и весовым пространством $E_\beta = E_\beta(0, a) = \{\psi \mid e^{-\beta t}\psi(ae^{-t}) = \varphi(t) \in E(0, \infty)\}$, $\|\psi\|^{E}_{\beta} = \|\varphi\|_{E_+}$. Очевидно,

$$E_\beta = \begin{cases} x^{-\beta} E(0, a), & E \neq \mathcal{L}_p, \\ x^{-\beta+1/p} E(0, a), & E = \mathcal{L}_p, \end{cases}$$

и если U — оператор, осуществляющий изометрию E_β на E_+, то $K = U^{-1}HU$.

Будем считать, что в (2) $\psi(x)$, $g(x) \in E_\beta$. Применяя полученные для оператора H результаты, приходим к следующей теореме:

Теорема 3. *Пусть ядра $k_j(x, y)$ — однородные функции порядков α_j, $-\infty < \alpha_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие условию* (6), *и пусть еще $d_j(x) \in C(0, a)$, $x^{1+\alpha_j} c_j(x) \in C(0, a)$. Тогда необходимое и достаточное условие нётеровости оператора K в E_β имеет вид*

$$\sigma(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{n} a^{1+\alpha_j}\, d_j(0) \lim_{x\to 0}\, [x^{1+\alpha_j}\, c_j(x)]\, K_j(i\lambda - \beta + 1) \neq 0,$$

$$-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty,$$

---

* То есть функции $\bar{a}_j(t)$, $\bar{b}_j(t)$ удовлетворяют самим условиям (4), (5).

** Условия разрешимости можно трактовать как условия ортогональности нулям транспонированного оператора, например, в $\mathcal{L}_p$ $(p > 1)$.

где $K_j(s)=\int\limits_0^\infty k_j(1,x)x^{s-1}dx$ *— преобразование Меллина функции* $k_j(1,x)$. *При выполнении этого условия* $\varkappa_{E_\beta}(K)=-\frac{1}{2\pi}\Delta[\arg\sigma(\lambda)]_{-\infty}^{\infty}$.

Заметим, что формулировка теоремы 3 ради простоты дана для случая непрерывных коэффициентов $x^{1+\alpha_j}c_j(x)$, $d_j(x)$. Нетрудно получить теорему для более общих коэффициентов, например, для $c_j(x)x^{1+\alpha_j}$, $d_j(x)\in M^{\sup}(0,a)$, где $M^{\sup}(0,a)=\{\psi(x)\,|\,\psi(x)\in M(0,a);\ \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0<x<1/n}|\psi(x)-c|=0\}$, $c=\mathrm{const}$.

Подобно теореме 3, из теоремы 2 вытекает теорема о нулях оператора K, на формулировке которой мы не останавливаемся. Отметим еще, что аналогичные теоремы имеют место в случае $a=\infty$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$K_1\psi\equiv\psi(x)+\int\limits_0^a\sum_{j=1}^n k_j(x,y)\psi(y)\,dy=f(x),\quad 0<x<a,\tag{7}$$

где $k_j(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha_j}k_j(x,y)$. В случае $n=1$ и $\alpha_1=-1$ это уравнение изучено Л. Г. Михайловым ([11]). Применяя теорему 3, видим, что, например, при $\alpha_j>-1$, $j=1,2,\ldots,n$, уравнение (7) является фредгольмовским во всех пространствах E_β: $\varkappa_{E_\beta}(K_1)=0$ при выполнении условия (6). Можно показать, используя одну теорему Л. Хёрмандера (([14]), стр. 9), что оператор (7) не ограничен ни в одном из пространств E_β, если $\alpha_j<-1$ хотя бы для одного j, $j=1,2,\ldots,n$. И, наконец, заметим, что при $n=1$, $\alpha_j=\alpha\geqslant-1$ нули оператора (7) имеют вид $\psi(x)=x^{1+\alpha-\beta}\psi_0(x)$, где $\psi_0(x)$ непрерывна и $\psi(0)=0$.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение

$$K_2\psi\equiv\psi(x)+c(x)\int\limits_0^1 d(y)\,\frac{\ln y-\ln x}{y-x}\,\psi(y)\,dy=g(x),\quad 0<x<1,$$

в пространствах $\mathscr{L}_p$ $(1<p<\infty)$. Пусть $c(x)$, $d(x)\in C(0,1)$ и $\nu_p=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{p}$. Необходимое и достаточное условие нётеровости имеет вид $c(0)d(0)>-1/\pi^2=-\nu_2^2$ при $p=2$ и $c(0)d(0)\neq-\nu_p^2$ при $p\neq2$. При этом $\varkappa_{\mathscr{L}_p}(K_2)=0$, если $c(0)d(0)>-\nu_p^2$, $1<p<\infty$, и $\varkappa_{\mathscr{L}_p}(K_2)=\mathrm{sign}(2-p)$, если $c(0)d(0)<-\nu_p^2$, $p\neq2$.

Ростовский государственный университет

Поступило 21 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Раковщик, УМН, 18, в. 4, 171 (1963). [2] Л. С. Раковщик, Сибирск. матем. журн., 6, № 1, 186 (1965). [3] И. Б. Симоненко, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 2 (9), 213 (1959). [4] Ф. Д. Беркович, Там же, Математика, № 12, 15 (1967). [5] И. А. Фельдман, Изв. АН МССР, № 10 (188), 16 (1961). [6] И. И. Комяк, ДАН, 179, № 2, 279 (1968). [7] М. Г. Крейн, УМН, 13, в. 5 (8), 3 (1958). [8] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теорет. и прикл. матем., в. 1, 58, Львов (1959). [9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 13, в. 2 (80), 3 1958). [10] И. Б. Симоненко, Матем. сборн., 174 (116), № 2, 298 (1967). [11] Л. Г. Михайлов, Интегральные уравнения с ядром однородным степени — 1, Душанбе, 1966. [12] Л. Г. Михайлов, Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1969. [13] Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948. [14] Л. Хёрмандер, Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, ИЛ, 1962.