Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 513.811 МАТЕМАТИКА

Ю. И. КУЛАКОВ

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Представлено академиком А. Д. Александровым 9 VII 1969)

Как известно, существует несколько вариантов аксиоматического построения эвклидовой геометрии. В настоящей статье предлагается некоторый новый способ аксиоматического построения локально эвклидовой, локально симплектической и локально неэвклидовой геометрии постоянной кривизны. Этот способ может рассматриваться как частный случай общего принципа феноменологической симметрии, предложенного в работе [1] для единообразного описания различных физических теорий феноменологического типа, таких как, например, механика, термодинамика, специальная теория относительности и т. п.

В данном частном случае принцип феноменологической симметрии формулируется следующим образом.

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots, l, \ldots\}$ — множество объектов произвольной природы, называемых точками, и пусть каждой упорядоченной паре (i, k), $i \neq k$, сопоставлено вещественное число a_{ik}. При этом предполагается * выполнимым одно из следующих двух условий:

I$_s$. Для всех пар (i, k), $i \neq k$, $a_{ik} = a_{ki}$.

I$_a$. Для всех пар (i, k), $i \neq k$, $a_{ik} = -a_{ki}$.

Пусть $\mathfrak{M}_n = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ — произвольное n-элементное подмножество множества $\mathfrak{M}$. Ему отвечает система $\mathfrak{A}_n$ из $^1/_2 n(n-1)$ чисел:

$$\mathfrak{A}_n = \{a_{i_r i_s}\},$$

где r и s пробегают всевозможные значения такие, что $1 \leqslant r < s \leqslant n$.

Систему $\mathfrak{A}_n$ будем рассматривать как точку в $^1/_2 n(n-1)$-мерном арифметическом пространстве $R^{n(n-1)/2}$. Множество всех точек пространства $R^{n(n-1)/2}$, сопоставляемых указанным образом всевозможным n-элементным подмножествам $\mathfrak{M}_n$, обозначим через $\mathfrak{C}_n$.

Введем следующее основное условие:

II. Множество $\mathfrak{C}_n$ представляет собой $^1/_2 n(n-1) - 1$-мерное дифференцируемое многообразие класса C_∞.

Условие II и составляет основное содержание принципа феноменологической симметрии применительно к рассматриваемому случаю. Если для множества $\mathfrak{M}$ задана функция пар a_{ik} $(i \neq k)$, так что выполнены условия I и II, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}$ задана физическая структура ранга n.

Введем понятие эквивалентности физических структур. Две физические структуры одинакового ранга n, заданные функциями a_{ik} и b_{ik}, мы будем называть эквивалентными, если существует строго монотонная функция одной переменной $\chi(x)$ такая, что для любых i и k $b_{ik} = \chi(a_{ik})$. (Заметим, что при описании экспериментальной действительности произвол выбора функции $\chi(x)$ может быть интерпретирован как произвол выбора шкалы измерительного прибора.)

* Можно показать, что условие «либо $a_{ik} = a_{ki}$, либо $a_{ik} = -a_{ki}$» является слишком жестким; достаточно потребовать, чтобы $a_{ik} = f(a_{ki})$, где $f(x)$ — априори неизвестная функция.

Задача состоит в том, чтобы для каждого $n \geqslant 2$ найти функцию a_{ik}, удовлетворяющую сформулированным выше требованиям.

Как показывает предварительный анализ [2], требование феноменологической симметрии является чрезвычайно жестким в том смысле, что число возможных физических структур определенного ранга n весьма невелико.

Можно показать [3], что для известных локально эвклидовой геометрии, локально неэвклидовой геометрии постоянной кривизны и локально симплектической геометрии принцип феноменологической симметрии имеет место (n-мерные геометрии реализуют соответствующие физические структуры ранга $n+2$, если под a_{ik} понимать соответствующие функции расстояния между элементами i и k), а само многообразие $\mathfrak{S}_n$ задается с точностью до эквивалентности следующими уравнениями:

I$_s$. $a_{ik} = a_{ki}$

1)

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & a_{ik} & a_{il} & \ldots & a_{im} \\ a_{ik} & a & a_{kl} & \ldots & a_{km} \\ a_{il} & a_{kl} & a & \ldots & a_{lm} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{lm} & a_{km} & a_{lm} & \ldots & a \end{vmatrix}}_{n} = 0$$

или в параметрическом виде

$$a_{ik} = g^0_{\sigma\rho} x^\sigma(i) x^\rho(k), \quad \sigma, \rho = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $x^\sigma(i)$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n-1)$ — $(n-1)$ вещественных параметров, относящихся к точке i и связанных между собой одним соотношением

$$g^0_{\rho\sigma} x^\rho(i) x^\sigma(i) = a,$$

a — произвольная постоянная;

2)

$$g^0_{\rho\sigma} = \begin{cases} 0, & \rho \neq \sigma, \\ \pm 1, & \rho = \sigma. \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{il} & \ldots & a_{im} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{kl} & \ldots & a_{km} \\ 1 & a_{il} & a_{kl} & 0 & \ldots & a_{lm} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{im} & a_{km} & a_{lm} & \ldots & 0 \end{vmatrix}}_{n} = 0$$

или в параметрическом виде

$$a_{ik} = g^0_{\mu\nu}(x^\mu(i) - x^\mu(k))(x^\nu(i) - x^\nu(k)), \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n-2,$$

где $x^\mu(i)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n-2)$ — $(n-2)$ произвольных вещественных параметров, относящихся к точке i.

Iа. $a_{ik} = -a_{ki}$.

1) $n = 2p - 1$,

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{il} & \ldots & a_{im} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & a_{kl} & \ldots & a_{km} \\ -1 & -a_{il} & -a_{kl} & 0 & \ldots & a_{lm} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & -a_{lm} & \ldots & 0 \end{vmatrix}}_{n} = 0$$

или в параметрическом виде:

$$a_{ik}=x^0(i)-x^0(k)+x^\nu(i)y_\nu(k)+x^\nu(k)y_\nu(i) \qquad \nu=1,\ 2,\ldots,p-2,$$

где $x^0(i)$, $x^\nu(i)$, $y_\nu(i)$ $(\nu=1,2,\ldots,p-2)$ — $(n-2)$ произвольных вещественных параметров, относящихся к точке i.

2) $n=2p$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{il} & \cdots & a_{im} \\ -a_{ik} & 0 & a_{kl} & \cdots & a_{km} \\ -a_{il} & -a_{kl} & 0 & \cdots & a_{lm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{im} & -a_{km} & -a_{lm} & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{n}=0$$

или в параметрическом виде:

$$a_{ik}=x^\lambda(i)y_\lambda(k)-x^\lambda(k)y_\lambda(i), \qquad \lambda=1,2,\ldots,p-1,$$

где $x^\lambda(i)$, $y_\lambda(i)$ $(\lambda=1,2,\ldots,p-1)$ — $(n-2)$ произвольных вещественных параметров, относящихся к точке i.

Легко видеть, что многообразие $\mathfrak{S}_n$ в виде $\mathrm{I}_s(1)$ соответствует $(n-2)$-мерному пространству постоянной (положительной или отрицательной) кривизны (кривизна $1/a$), многообразие $\mathfrak{S}_n$ в виде $\mathrm{I}_s(2)$ — $(n-2)$-мерному эвклидову (или псевдоэвклидову) пространству, а $\mathfrak{S}_n$ в виде $\mathrm{I}_a(1)$ и $\mathrm{I}_a(2)$ — $(n-2)$-мерному симплектическому пространству.

Итак, все перечисленные выше многообразия $\mathfrak{S}_n$ являются частными случаями многообразий, реализующих физическую структуру ранга n. (Эти многообразия мы будем называть феноменологическими пространствами размерности $n-2$.)

Возникает вопрос: являются ли симплектические пространства и пространства положительной, нулевой и отрицательной кривизны единственными типами феноменологических пространств.

Для случая $n=3$ исчерпывающее решение вопроса получено Г. Г. Михайличенко, показавшим, что все феноменологические пространства размерности 1 эквивалентны эвклидовой прямой.

Что же касается случаев $n\geqslant 4$, то вопрос о существовании каких-либо новых типов феноменологических пространств, отличных от эвклидова, симплектического и пространств постоянной кривизны остается открытым.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Решетняку за внимание и постоянный интерес к работе.

Новосибирский государственный университет

Поступило 3 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. И. Кулаков, К теории физических структур, Новосибирск. унив., 1968. [2] Г. Г. Михайличенко, Дополнение к лекциям Ю. И. Кулакова Элементы теории физических структур, Новосибирск. унив., 1969 (Ротапринт). [3] Ю. И. Кулаков, Элементы теории физических структур, Новосибирск. унив., 1969.