Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 517.94 *МАТЕМАТИКА*

Ю. ЛАЙТЕРЕР

КРИТЕРИИ НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 30 I 1970)

1. Пусть Γ — единичная окружность и L_2^k $(k = 1, 2, \ldots)$ — гильбертово пространство вектор-функций $f(\zeta) = f\{f_j(\zeta)\}_{j=1}^k$ с координатами из $L_2(\Gamma)$ и нормой

$$\|f\| = \Big(\sum_{j=1}^k \|f_j\|_{L_2}^2\Big)^{1/2}.$$

В настоящем сообщении рассматривается сингулярный интегральный оператор T из $\mathfrak{R}(L_2^n, L_2^m)$ *, определенный равенством

$$(Tf)(\zeta) = c(\zeta)f(\zeta) + \frac{d(\zeta)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}dz \quad (f \in L_2^n), \tag{1}$$

где $c(\zeta)$, $d(\zeta)$ — $m \times n$-матрицы с непрерывными на Γ элементами.

Если $m = n$, то, как известно ([1]), оператор T является Φ-оператором в том и только том случае, когда ранг каждой из матриц

$$a(\zeta) = c(\zeta) + d(\zeta), \quad b(\zeta) = c(\zeta) - d(\zeta)$$

равен n при всех $\zeta \in \Gamma$. Если же при некотором $\zeta \in \Gamma$ хотя бы одна из функций $\det a(\zeta)$ и $\det b(\zeta)$ обращается в нуль, то, как показано в ([2]), оператор T не является ни Φ_+-, ни Φ_--оператором **.

В настоящем сообщении устанавливаются необходимое и достаточное условия, при которых оператор T нормально разрешим (теорема 1). Необходимым условием нормальной разрешимости является независимость рангов матриц $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ от аргумента ζ. Оказывается, что в случае $m > 1$ и $n > 1$ одного этого условия недостаточно.

Полученные результаты применяются к уравнениям Винера — Хопфа (теорема 3). Для одного уравнения $(n = m = 1)$ результаты этого сообщения подробно изложены в ([3]).

2. Для всех k обозначим через P ортогональный проектор в L_2^k, определенный формулой

$$(Pf)(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}dz \quad (f \in L_2^k)$$

и положим $Q = I - P$.

В дальнейшем нам будет удобно оператор T, определенный равенством (1), записать в виде $T = aP + bQ$, где

$$a(\zeta) = c(\zeta) + d(\zeta) \text{ и } b(\zeta) = c(\zeta) - d(\zeta).$$

Пусть $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ и $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ — ортогональное дополнение пространства $\operatorname{Ker} T$ в L_2^n. Для $x \in \operatorname{Ker} T$ положим

$$\|x\|_T = \rho(Px, \operatorname{Ker} aI) + \rho(Qx, \operatorname{Ker} bI).$$

---

* Если $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — два банахова пространства, то обозначим через $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{B}_2$.

** Оператор A называется нормально разрешимым, если множество его значений замкнуто. Он называется $\Phi_+(\Phi_-)$-оператором, если, кроме того, $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ $(\dim \operatorname{Coker} A < \infty)$. Если A является одновременно Φ_+- и Φ_--оператором, то он называется Φ-оператором.

Легко видеть, что $\| \ \|_T$ является нормой в линейном многообразии $\operatorname{Ker} T^{\perp}$.

Теорема 1. *Пусть $a(\zeta)$, $b(\zeta)$ $(\zeta \in \Gamma)$ — две непрерывные $m \times n$-матрицы-функции.*

Для того чтобы оператор

$$T = aP + bQ$$

из $\Re(L_2^n, L_2^m)$ был нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) *Ранг каждой из матриц* $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ *не зависит от параметра ζ на единичной окружности;*

б) $\operatorname{Ker} T^{\perp}$ *являяется полным банаховым пространством с нормой* $\| \ \|_T$ *.

Нетрудно установить, что условие б) эквивалентно условию

б′ $$\inf_{x \in \operatorname{Ker},\ T^{\perp},\ \|x\|=1} \|x\|_T > 0.$$

Условия а) и б) независимы. В самом деле, положим

$$a(\zeta) = \begin{pmatrix} \psi(\zeta) & 1 \\ \psi^2(\zeta) & \psi(\zeta) \end{pmatrix}, \quad b(\zeta) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\psi(\zeta)$ — непрерывная функция на Γ, обращающаяся в нуль на дуге окружности. Без труда показывается, что в этом случае условие а) выполняется, а условие б) не выполняется.

Отметим, что вообще условие б) не выполняется, когда $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, а, по крайней мере, одно из подпространств $\operatorname{Ker} aI$, $\operatorname{Ker} bI$ имеет положительную размерность.

В случае, когда $m = n = 1$, функция $a(\zeta)$ обращается в нуль только в одной точке и $b(\zeta) \equiv 1$, легко проверяется, что условие б) выполняется, а условие а) не выполняется.

В доказательстве достаточности условий а) и б) существенно используется полная непрерывность операторов QaP и PbQ (см. ([4])). Кроме того, используется следующее утверждение: если ранг матрицы $a(\zeta)$ не изменяется на единичной окружности, то оператор aI из $\Re(L_2^n, L_2^m)$ является нормально разрешимым (см. ([5])).

Доказательство необходимости условия а) является наиболее сложной частью доказательства. Оно основано на следующих двух леммах:

Лемма 1. *Пусть $a^*(\zeta)$ $(\zeta \in \Gamma)$ — непрерывная матрица-функция, ранг которой имеет различные значения на* Γ.

Тогда существует постоянная матрица v порядка m такая, что матрица-функция

$$f(\zeta) = \| f_{jk}(\zeta) \|_{k=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,n} \overset{\mathrm{def}}{=} a^*(\zeta)\, v$$

удовлетворяет следующему условию.

Для каждого положительного целого числа s существует интервал $U_s \subseteq \Gamma$, линейная комбинация

$$(h_{s1}(\zeta), \ldots, h_{sm}(\zeta)) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{sj} (f_{j1}(\zeta), \ldots, f_{jm}(\zeta))$$

строк матрицы-функции $f(\zeta)$, комплексные числа $\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sm}$ и положительное число δ_s, такие, что $\sum_{j=1}^{m} |\beta_{sj}|^2 = 1$, *и имеют место следующие оценки:*

$$\sup_{\zeta \in U_s,\ \Sigma |\xi|^2 = 1} \left| \sum_{k=1}^{m} h_{sk}(\zeta) \xi_k \right| \leqslant 2\delta_s,$$

$$\inf_{\zeta \in U_s} \left| \sum_{k=1}^{m} h_{sk}(\zeta) \beta_{sk} \right| \geqslant {}^1/_2\, \delta_s,$$

* В случае $m = n = 1$ условие б) является следствием условия а).

$$\sup_{\zeta \in U_s} \left| f(\zeta) \begin{pmatrix} \beta_{s1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{sm} \end{pmatrix} \right|_{n,2} \leqslant \frac{1}{s},$$

$$\sup_{s,k} \| h_{sk} \|_{L_2(\Gamma)} < \infty,$$

$$\text{где } |(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|_{n,2} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Лемма 2. *Пусть R — ортогональный проектор в $L_2(\Gamma)$ и φ, ψ — две функции из $L_2(\Gamma)$.*

Если $R\varphi = R\psi$, то для любого измеримого множества $U \subseteq \Gamma$ имеет место неравенство

$$\|\psi\| \, \|R\varphi\|_{\Gamma \setminus U} + (\|\psi\|_U + \|R\| \varphi_U) \|R\varphi\|_U \geqslant 0,$$

где

$$\|\chi\|_V \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\int_V |\chi(\zeta)|^2 |d\zeta| \right)^{1/2}$$

при $\chi \in L_2(\Gamma)$ и $V \subseteq \Gamma$.

Приведем схему доказательства необходимости условия а). Допустим, что ранг матрицы $a(\zeta)$ на Γ меняется. Для доказательства того, что оператор T не является нормально разрешимым, достаточно построить последовательность функций $y_s \in L_2^m$, для которой числа $\alpha_s = \inf\limits_x \|x\| / \|T^* y_s\|$ неограниченно возрастают, где нижняя грань распространяется на все векторы $x \in L_2^m$, обладающие свойством $T^* x = T^* y_s$ $(T^* = Pa^* + Qb^*)$.

Оказывается, что такой последовательностью функций может служить последовательность

$$y_s(\zeta) = \zeta^{\varkappa_s} (\mathrm{mes}\, U_s)^{-1/2} \chi_{U_s}(\zeta) \, v \begin{pmatrix} \beta_{s1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{sm} \end{pmatrix},$$

где χ_{U_s} — характеристическая функция интервала U_s и $\varkappa_s$ — достаточно большое целое число.

Последнее утверждение доказывается с помощью оценок из леммы 1 и леммы 2.

Теорема 2. *Если для всех $\zeta \in \Gamma$ ранги матриц $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ равны* $\min\{m, n\}$, *то оператор T нормально разрешим.*

Теорема 2 выводится из теоремы 1.

3. Из теорем 1 и 2 можно вывести критерии нормальной разрешимости систем уравнений типа Винера — Хопфа. Ниже приводятся примеры таких теорем.

Пусть $\tilde{l}_2^k$ — гильбертово пространство всех последовательностей $x = \{(\xi_j^1, \ldots, \xi_j^k)\}_{j=-\infty}^{\infty}$, для которых

$$\|x\|^2 = \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty,$$

и пусть l_2^k — его подпространство всех последовательностей вида

$$\{(\xi_j^1, \ldots, \xi_j^k)\}_{j=0}^{\infty} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если $\varphi(\zeta)$ — непрерывная функция на Γ, то через T_φ обозначим оператор из $\mathfrak{R}(l_2^1, l_2^1)$, определенный теплицевой матрицей $\|\varphi_{j-k}\|_{j,k=1}^{\infty}$, где φ_j $(j = 0, \pm 1, \ldots)$ — коэффициенты Фурье функции φ. Через U_φ обозначим оператор из $\mathfrak{R}(\tilde{l}_2^1, \tilde{l}_2^1)$, определенный матрицей $\|\varphi_{j-k}\|_{j,k=-\infty}^{\infty}$.

Минимальным углом (см. ([6])) между двумя подпространствами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ банахова пространства называется угол $\varphi^{(m)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ $(0 \leqslant \varphi^{(m)} \leqslant \pi / 2)$, определенный равенством

$$\sin \varphi^{(m)}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \min \{\rho(S(\mathfrak{M}), \mathfrak{N}), \rho(S(\mathfrak{N}), \mathfrak{M})\},$$

где $S(\mathfrak{M})$ — единичная сфера подпространства $\mathfrak{M}$.

Теорема 3. *Пусть* $a(\zeta) = a_{jk}(\zeta)\|_{k=1, \ldots, n}^{j=1, \ldots, m}$ — *непрерывная* $m \times n$-*матрица-функция на* Γ; T_a — *оператор из* $\mathfrak{R}(l_2^n, l_2^m)$, *определенный матрицей* $\|T_{a_{jk}}\|_{k=1, \ldots, n}^{j=1, \ldots, m}$, *и* U_a — *оператор из* $\mathfrak{R}(\bar{l}_2^n, \bar{l}_2^m)$, *определенный матрицей* $\|U_{a_{jk}}\|_{k=1, \ldots, n}^{j=1, \ldots, m}$.

Для того чтобы оператор T_a *был нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

α) *ранг матрицы* $a(\zeta)$ *на* Γ *не изменяется;*

β) $\sin \varphi^{(m)}(\operatorname{Ker} T_a^{\perp}, \operatorname{Ker} U_a) > 0$, *где* $\operatorname{Ker} T_a^{\perp}$ — *ортогональное дополнение* $\operatorname{Ker} T_a$ *в* l_2^n.

Отметим, что условия α) и β) являются независимыми.

Теорема 4. *Пусть* T_a — *оператор из формулировки теоремы 3. Если для всех* $\zeta \in \Gamma$ *ранг матрицы* $a(\zeta)$ *равен* $\min\{m, n\}$, *то оператор* T *нормально разрешим.*

Автор глубоко благодарит И. Ц. Гохберга за постановку задачи, руководство и поддержку.

Институт математики
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
21 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, Уч. зап. Кишиневск. гос. унив., 11 (1954). [2] И. Ц. Гохберг, УМН, 19, 1, 71 (1964). [3] Ю. Лайтерер, Матем. исследования, 5, 1, Кишинев (1970). [4] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Проекционные методы решения уравнений Винера — Хопфа, Кишинев, 1967, стр. 86. [5] Ю. Лайтерер, Матем. исследования, 5, 2, Кишинев (1970). [6] И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, УМН, 14, 5, 135 (1959).