Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 511.3

МАТЕМАТИКА

Б. В. ЛЕВИН, Н. М. ТИМОФЕЕВ

О СУММАХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 12 I 1970)

Недавно Г. Халаш ([1]) удачно применил аналитический метод к оценке средних значений мультипликативных функций. Соединяя его идеи с новыми соображениями, мы получаем некоторые результаты относительно сумм мультипликативных функций. Для характеристики этих результатов приведем частный случай доказываемой ниже теоремы 2:

Теорема 1. *Если $f(p^r) = O(1)$ и существуют $\tau > 1/2$, $A = \text{const}$ такие, что*

$$s(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{|f(p)|\log p}{p} \leqslant \tau \log x + A\frac{\log x}{(\log\log x)^{1+\varepsilon}}, \tag{1}$$

то существуют постоянные C_0, a и медленно меняющаяся функция $L(u)$ ($|L(u)| = 1$) такие, что

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = C_0 x^{1+ia} L(\log x)^{\tau-1} x + o(x\log^{\tau-1}x). \tag{2}$$

Ниже приводится схема доказательства более общего результата, содержащего в качестве частного случая теорему 1.

Теорема 2. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция, удовлетворяющая условию (1) с $\tau > 1/2$,*

$$|f(p^r)| \leqslant 1/3 p^{r\gamma} \tag{3}$$

для $r \geqslant 1$ и некоторого $\gamma = 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда, если

$$\sum_{y<p\leqslant x} \frac{|f(p)|\log p}{p} = O\left(\log\frac{x}{y}\right) + \varepsilon(y), \tag{4}$$

где $\varepsilon(y)$ монотонно стремится к нулю при $y\to\infty$ или

$$f(p) \geqslant c > 0, \quad \sum_{p\leqslant x} f(p)\log p = O(x), \tag{5}$$

то существуют C, a, $L(u)$, описанные в теореме 1, такие, что имеет место (2).

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов. Пусть

$$F_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_a(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{s+ia}}.$$

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы 2, то существуют такие a, C, $L(1/(\sigma-1))$, что*

$$F_a(s) = CL\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)\Big/(s-1)^{\tau} + o\left(\frac{1}{(\sigma-1)^{\tau}}\right) \tag{6}$$

при $\sigma\to 1+0$ равномерно в любой полосе $|t| \leqslant M$.

Заметим, что в лемме 1 достаточно потребовать только $\tau > 0$, а не $\tau > 1/2$, как в теореме 2.

Доказательство. Условие (3) вместе с вытекающим из (4) условием (5) обеспечивает возможность представления $F(s)$ в виде

$$F(s) = \exp\left(\sum_p \frac{f(p)}{p^s} + H(s)\right), \tag{7}$$

где $H(s)$ регулярна в области $\sigma > 1/2 + \gamma = 1 - \varepsilon$. Пользуясь (7), получаем для любого t

$$\frac{|F(\sigma + it)|}{\zeta^\tau(\sigma)} = \exp\left\{-\sum_p \frac{\tau - \operatorname{Re} f(p)\, p^{-it}}{p^\sigma} + \operatorname{Re} H(s) + H_1(\sigma)\right\}, \tag{8}$$

где $H_1(\sigma) = \tau \sum\limits_p \left(\frac{1}{p^\sigma} + \log\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)\right)$. Суммирование по Абелю дает

$$\sum_p \frac{\tau - \operatorname{Re} f(p)\, p^{-it}}{p^\sigma} = (\sigma - 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s(n)}{n_1^\sigma \log n_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s(n)}{n_1^\sigma \log^2 n_1}, \tag{9}$$

где $n < n_1 < n + 1$.

Легко показать, что предел левой части (9) при $\sigma \to 1 + 0$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{\sigma \to 1+0} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{s(n)}{n_1^\sigma \log^2 n_1}$. С другой стороны, если последний предел не существует, то на основании условия (1) он равен $+\infty$ и, следовательно, предел левой части в этом случае равен $+\infty$.

Таким образом, получаем следующую альтернативу:

1) либо для всех t $|F(s)| = o(1 / (\sigma - 1)^\tau)$ равномерно по $|t| \leqslant M$;

2) либо существует a такое, что

$$|F_a(s)| = \frac{e^{-\gamma}}{(\sigma - 1)^\tau} + o\left(\frac{1}{(\sigma - 1)^\tau}\right), \tag{10}$$

где

$$\gamma = \lim_{\sigma \to 1+0} \sum_p \frac{\tau - \operatorname{Re} f_a(p)}{p^\sigma} + \operatorname{Re} H(1) + H_1(1).$$

Покажем, что в этом случае, выбрав

$$C \sim \exp\left\{-\sum_p \frac{\tau - \operatorname{Re} f_a(p)}{p^\sigma} + H(1) + H_1(1)\right\},$$

$$L\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) = \exp i \sum_p \frac{\operatorname{Im} f_a(p)}{p^\sigma},$$

получим

$$F_a(s) = CL\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) \zeta^\tau(s) + o\left(\frac{1}{(\sigma - 1)^\tau}\right) = CL\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) \Big/ (s - 1)^\tau + o\left(\frac{1}{(\sigma - 1)^\tau}\right)$$

равномерно по t в любой фиксированной полосе $|t| \leqslant M$.

Заметим, что в этом случае существует $\lim\limits_{\sigma \to 1+0} \sum\limits_p \frac{\tau - |f_a(p)|}{p^\sigma} = \gamma_1$, ибо в противном случае, как и выше, из (1) получаем

$$\lim_{\sigma \to 1+0} \sum_p \frac{\tau - |f_a(p)|}{p^\sigma} = +\infty,$$

$$\frac{|F_a(s)|}{\zeta^\tau(\sigma)} \leqslant \zeta^{-\tau}(\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_a(n)|}{n^\sigma} = \exp\left\{\sum_p \frac{\tau - |f(p)|}{p^\sigma} + H_3(\sigma) = o(1),\right.$$

что противоречит (10), ибо $e^{-\gamma} \neq 0$.

Пусть K — произвольная фиксированная постоянная и $|t| \leqslant \leqslant K(\sigma-1)$; тогда, полагая $\arg f_a(p)=\theta_p$, получаем:

$$\sum_p \frac{\tau-\operatorname{Re} f_a(p)\,p^{-it}}{p^\sigma}=\gamma_1+\sum_p \frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}(1-\cos t\log p)+$$
$$+2\sum_p \frac{|f_a(p)|\sin^2\theta_p}{p^\sigma}\cos t\log p-\sum_p \frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}\sin\theta_p \sin t\log p\geqslant$$
$$\geqslant c_1\sum_p \frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}\sin\theta_p\sin t\log p\geqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\log K, \tag{11}$$

если $\sum\limits_p \frac{|f(p)|}{p^\sigma}(1-\cos t\log p)>\varepsilon_1\log\frac{|t|}{\sigma-1}$ при $|t|\geqslant K(\sigma-1)$.

Последнее очевидно для случая $|f(p)|\geqslant c>0$.

В случае же выполнения условия (4) поступаем так: пусть $\alpha = =\arccos(1-\varepsilon_2)<2\sqrt{\varepsilon_2}$; тогда

$$\sum_p \frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}(1-\cos t\log p)\geqslant\varepsilon_2\sum_p\frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}-\varepsilon_2\sum_{\substack{p\\ 1-\varepsilon\leqslant\cos t\log p\leqslant 1}}\frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon_2\tau\log\frac{1}{\sigma-1}-\gamma_1-\varepsilon_2\sum_{p\leqslant e^{\alpha/t}}\frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}-\varepsilon_2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\exp\frac{2\pi k-\alpha}{t}<p\leqslant\exp\frac{2\pi k+\alpha}{t}}\frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}.$$

Так как из (1) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\exp\frac{2\pi k-\alpha}{t}<p\leqslant\exp\frac{2\pi k+\alpha}{t}}\frac{|f_a(p)|}{p^\sigma}\leqslant t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp(1-\sigma)\frac{2\pi k-\alpha}{t}}{2\pi k-\alpha}\times$$
$$\times\sum_{\exp\frac{2\pi k-\alpha}{t}<p\leqslant\exp\frac{2\pi k+\alpha}{t}}\frac{|f_a(p)|\log p}{p^\sigma}\leqslant c_3\sqrt{\varepsilon_2}\log\frac{t}{\sigma-1}$$

на основании (4), то при $K(\sigma-1)\leqslant|t|\leqslant M$ имеем

$$\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}(1-\cos t\log p)\geqslant\varepsilon_2\tau\log\frac{1}{\sigma-1}-\varepsilon_2\tau\log\frac{1}{t}-$$
$$-c_4\varepsilon_2^2\log\frac{t}{\sigma-1}-c_5\geqslant\varepsilon_3\log K.$$

Из (8) вытекает справедливость (6) при $K(\sigma-1)\leqslant|t|\leqslant M$. В случае $|t|<K(\sigma-1)$, пользуясь (1), получаем $\sum\limits_p\frac{\tau-\operatorname{Re} f_a(p)}{p^\sigma}=o(1)$ при $\sigma\to1+0$. Дальнейшие рассуждения почти полностью совпадают с соответствующими рассуждениями в ([1]). Это и доказывает лемму 1.

Далее поступаем следующим образом: пусть $\sigma_0=1+1/\log x$, тогда

$$\sum_{n\leqslant x}f_a(n)\log\frac{x}{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma_0)}\frac{x^s}{s^2}F_a(s)\,ds.$$

Пользуясь (6), находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|<K(\sigma_0-1)}\frac{x^s}{s^2}F_a(s)\,ds=\frac{CL(\log x)}{\Gamma(\tau)}x\log^{\tau-1}x+o(x\log^{\tau-1}x).$$

Интегрируя по частям и пользуясь неравенством Шварца, получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|\geqslant K(\sigma-1)}\frac{x^{s-1}}{s^2}F_a(s)\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int_{|t|>K(\sigma-1)}\frac{1}{|s|^{3/2}}\left|\frac{F'}{F}(s)\right|^2ds\right]^{1/2}\left[\int_{|t|>K(\sigma-1)}\frac{1}{|s|^{5/2}}|F(s)|^2dt\right]^{1/2}.$$

Почти дословным повторением соответствующего места из ([1]) с учетом ([5]) получаем, что

$$\int\limits_{(\sigma_0)} \frac{1}{|s|^{5/4}} \left| \frac{F'_\alpha}{F_\alpha}(s) \right|^2 dt \leqslant \frac{c_4}{\sigma_0 - 1}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha > 1$ *такое, что* $\alpha\tau > 1$; *тогда*

$$\int\limits_{(\sigma_0)} \frac{1}{|s|^2} |F(s)|^\alpha dt \leqslant \frac{c_5}{(\sigma_0 - 1)^{\alpha\tau - 1}}.$$

Доказательство. Опираемся на формулу (7) и то обстоятельство, что

$$\exp\left\{\frac{\alpha}{2} \sum_p \frac{f(p)}{p^\sigma}\right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m^s}, \text{ где } \lambda(p^k) = \frac{f^k(p)}{k!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k.$$

Последний ряд сходится при $\sigma > 1$ и см. ([2]))

$$\left|\sum_{m\leqslant x} \lambda(m)\right| \leqslant c_5 \frac{x}{\log x} \exp\left[\frac{\alpha}{2} \sum_{p\leqslant x} \frac{\tau}{p} + o(1)\right] \leqslant$$

$$\leqslant c_6 \frac{x}{\log x} \prod_p \left(1 + \frac{\tau(\alpha/2)}{p} + \frac{\tau^2(\alpha/2)^2}{2!\,p^2} + \ldots\right) \leqslant c_7 \sum_{m\leqslant x} \lambda'(m),$$

где $\lambda'(m)$ — коэффициенты ряда Дирихле.

Снова применяя равенство Парсеваля и соображения из ([1]), получаем доказательство леммы.

Вместе с полученными оценками это дает

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n^{i\alpha}} \log^* \frac{x}{n} = \frac{C}{\Gamma(\tau)} x L(\log x) \log^\tau x + o(x \log^\tau x). \tag{12}$$

Переход от (12) к (2) осуществляется путем асимптотического дифференцирования и суммирования по Абелю с учетом того, что $L(u)$ — медленно меняющаяся функция.

Владимирский педагогический институт
им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило
22 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Halasz, Acta Math. Acad. Sci. Hungarical, 19, № 3—4 (1968). [2] Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, ДАН, 188, № 3 (1969).