Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ПРОИЗВОЛОВ

О НАСЛЕДСТВЕННОЙ И КОЛЛЕКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ПЕРИФЕРИЧЕСКИ БИКОМПАКТНОГО ДРЕВОВИДНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 I 1970)

Как показывают многочисленные и простые примеры, периферически бикомпактное хаусдорфово пространство не обязано быть нормальным. Такое пространство, как показал Фрейденталь ([1]), лишь автоматически вполне регулярно. Однако древовидное * периферически бикомпактное пространство нормально, что доказано здесь. Более того, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Всякие два непересекающиеся замкнутые множества древовидногр периферически бикомпактного пространства разделяются дискретным множеством.*

Доказательство. Иначе говоря, нужно доказать, что если замкнутые A, $B \subset X$, где X периферически бикомпактно и древовидно, $A \cap B = \Lambda$, то найдется такое дискретное множество $C \subset X$, что $X \setminus C = X_1 \cup X_2$, $A \subset X_1$, $B \subset X_2$, где X_1 и X_2 открыты в X, $X_1 \cap X_2 = \Lambda$.

Всякие две точки в древовидном периферически бикомпактном пространстве соединяются единственным упорядоченным континуумом ([2]). Если $D \subset V \subseteq X$, то линейной оболочкой множества D в множестве V назовем объединение всех тех упорядоченных континуумов, соединяющих попарно точки D, которые целиком содержатся в V.

Лемма 1. *Пусть $D \subset V \subseteq X$, где D замкнуто, V открыто, а X — древовидное периферически бикомпактное пространство. Тогда линейная оболочка LD множества D в множестве V замкнута в X.*

Докажем лемму. Допустим, что $x \in [LD] \setminus LD$. Возьмем связную окрестность Ox с конечной границей такую, что $Ox \cap D = \Lambda$. Так как $x \in [LD] \setminus LD$, существует бесконечное количество упорядоченных континуумов, целиком принадлежащих $LD \cap [Ox]$ и соединяющих попарно граничные точки Ox. Но граница Ox конечна, и найдется среди этих континуумов два различных, соединяющих пару граничных для Ox точек, что противоречит лемме 1 из ([2]).

Лемма 2. *Граница связного открытого подмножества в древовидном периферически бикомпактном пространстве пунктиформна.*

Лемма 3. *Если точка c разбивает связное подмножество D древовидного периферически бикомпактного пространства X между точками a и b; a, $b \in D$, то точка c разбивает и любое объемлющее D подмножество между теми же точками.*

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, возьмем линейную оболочку LA множества A в множестве $X \setminus B$ и затем линейную оболочку LB множества B в $X \setminus LA$. Локально связное множество $\tilde{X} = X \setminus (LA \cup LB)$ рассыпем на открытые компоненты: $\tilde{X} = \bigcup\limits_{\alpha} \tilde{X}_\alpha$. Утверждается далее, что всякое $[\tilde{X}_\alpha]$ содержит не более чем по одной точке из LA и LB.

В самом деле, если, например, a_1, $a_2 \in [\tilde{X}] \cap LA$, то представляются две возможности. Первая: упорядоченный континуум L, соединяющий точки

* Пространство древовидно, если оно связно и если всякие две точки в нем разделяются третьей. Оно автоматически хаусдорфово.

a_1 и a_2 и целиком лежащий в $[\bar{X}_\alpha]$ таков, что $L \cap LB = \Lambda$. Но тогда налицо противоречие с леммой 2. Вторая: нашлась точка $b \in L \cap LB$. Но тогда, в силу леммы 3, точка b разбивает $[\bar{X}_\alpha]$ между a_1 и a_2, а также, как легко заключить, b разбивает $\bar{X}_\alpha$, что противоречит связности $\bar{X}_\alpha$.

Далее, если $[\bar{X}_\alpha] \setminus \bar{X}_\alpha$ состоит из двух точек, то берем точку $c_\alpha \in \bar{X}_\alpha$, разбивающую $[\bar{X}_\alpha]$ между этими двумя точками. Объединение всех таких точек c_α образует дискретное замкнутое в X множество C.

Локально связное $X \setminus C$ рассыпаем на открытые компоненты; те из них, которые пересекаются с LA, объединяем — получаем OA; те, которые пересекаются с LB, объединяем — получаем OB. Нет такой компоненты, которая пересекалась бы и с LA, и с LB. Допустим противное, нашлась компонента P множества $X \setminus C$ такая, что $P \cap LA \neq \Lambda$ и $P \cap LB \neq \Lambda$. Но тогда найдется такая компонента Q множества $P \setminus (LA \cup LB)$, что $[Q]$ пересекается и с LA и с LB ввиду связности P. Найдется компонента $\bar{X}_\alpha$ множества $X \setminus (LA \cup LB)$, содержащая Q. Из последнего следует, что в множестве C есть точка c_α, разделяющая $[Q]$ между точками $a = [Q] \cap LA$ и $b = [Q] \cap LB$, и при этом $c_\alpha \in Q$, но это дает противоречие. Итак, теорема доказана.

Следствие 1. *Большая индуктивная размерность древовидного периферически бикомпактного пространства равна единице **.

Кроме того, из теоремы 1 следует нормальность древовидного периферически бикомпактного пространства. Но справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2. *Древовидное периферически бикомпактное пространство наследственно нормально.*

Доказательство. Пусть $\tilde{X} \subseteq X$ — подпространство древовидного периферически бикомпактного пространства X, пусть $A, B \subset \tilde{X}$ замкнуты в $\tilde{X}$ и $A \cap B = \Lambda$. Рассмотрим множество $C = [A] \cap [B]$. Очевидно, $C \subseteq X \setminus \tilde{X}$. Рассыпаем локально связное открытое в X множество $X \setminus C$ на открытые компоненты: $X \setminus C = \bigcup_\alpha X_\alpha$. Каждое X_α является периферически бикомпактным древовидным подпространством X. В самом деле, всякое подмножество периферически бикомпактного древовидного пространства само периферически бикомпактно, так как у периферически бикомпактного древовидного пространства для каждой точки есть сколь угодно малые окрестности с конечными границами ([3]). Поэтому, в силу теоремы 1, для множеств $A_\alpha = A' \cap X_\alpha$ и $B_\alpha = B' \cap X_\alpha$, где $A' = [A] \setminus C$ и $B' = [B] \setminus C$, найдутся непересекающиеся окрестности OA_α и OB_α такие, что $OA_\alpha, OB_\alpha \subset X_\alpha$. Заметим еще, что $A \subseteq A'$ и $B \subseteq B'$.

Нетрудно видеть, что $OA = \bigcup_\alpha OA_\alpha$ и $OB = \bigcup_\alpha OB_\alpha$ — непересекающиеся окрестности множеств A и B. Последнее означает, что $\tilde{X}$ нормально, и теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Диадический древовидный бикомпакт метризуем.*

Нами была высказана гипотеза о метризуемости наследственно нормального диадического бикомпакта, которую удалось доказать Б. А. Ефимову ([4]). В соединении с теоремой 2 это дает следствие 2.

Теорема 3. *Древовидное периферически бикомпактное пространство коллективно нормально.*

Лемма 4. *Множество LD, о котором говорится в лемме 1, локально связно.*

Докажем лемму. Пусть точка $x \in LD$ и Ox — ее связная окрестность в X такая, что $Ox \subset V$. Утверждается, что множество $O_1x = Ox \cap LD$, являющееся окрестностью точки x в множестве LD, связно. В самом деле, всякая точка $y \in O_1x$ может быть соединена с точкой x упорядоченным континуумом, целиком лежащим в Ox, а значит и лежащим в O_1x по смыслу линейной оболочки. Лемма доказана.

* Вопрос об Ind древовидного периферически бикомпактного пространства поднимался Б. А. Пасынковым.

Лемма 5. *Пусть $\Gamma \subset X$ — дискретное подмножество древовидного периферически бикомпактного пространства X и при этом $X \setminus \Gamma$ связно. Тогда найдется замкнутое множество $C \subset X$ такое, что $X \setminus C$ рассыпается на открытые компоненты, каждая из которых содержит не более чем по одной точке из* Γ.

Докажем лемму. Пусть $\Gamma = \{x_\alpha\}$, для произвольного $x_\alpha \in \Gamma$ обозначим $\Gamma_\alpha = \Gamma \setminus x_\alpha$. Линейная оболочка $L\Gamma_\alpha$ множества Γ_α в X замкнута в силу леммы 1, связно и $x_\alpha \notin L\Gamma_\alpha$. Последнее следует из того, что $X \setminus x_\alpha$ связно по условию леммы и всякие две точки в $X \setminus x_\alpha$ соединяются единственным упорядоченным континуумом (см. лемму 1 из ([2])). Через V_α обозначаю открытую компоненту множества $X \setminus L\Gamma_\alpha$, содержащую точку x_α. Утверждается, что $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} = \Lambda$. Допустим противное, нашлась точка $c \in V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$. Тогда $V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}$ связно. Замечаем, что $[V_{\alpha_1}] \setminus V_{\alpha_1}$ состоит из единственной точки, ее обозначим y_{α_1}. Последнее обстоятельство можно обосновать с помощью леммы 3. Соответственно через y_{α_2} обозначим точку $[V_{\alpha_2}] \setminus V_{\alpha_2}$. Из сказанного ясно, что $[V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}] \setminus (V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}) = y_{\alpha_1} \cup y_{\alpha_2}$ и $V = [V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}]$ — древовидное периферически бикомпактное подпространство пространства X. Замечаем, что $y_{\alpha_2} \notin V_{\alpha_1}$. В самом деле, если бы $y_{\alpha_2} \in V_{\alpha_1}$, то мы соединили бы x_{α_2} с y_{α_1} упорядоченным континуумом, который непременно проходил бы через y_{α_2} и далее точку y_{α_1} соединили бы с $x_\beta \in \Gamma \setminus (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$; следовательно, получили бы, что x_{α_2} и x_β соединены упорядоченным континуумом, которому принадлежит точка y_{α_2}, что означает: $y_{\alpha_2} \in L\Gamma_{\alpha_1}$. Но последнее в то же время означает, что $y_{\alpha_2} \notin V_{\alpha_1}$. Соответственно $y_{\alpha_1} \notin V_{\alpha_2}$. Однако точка $y_{\alpha_1} \in L\Gamma_{\alpha_1}$ и точка $y_{\alpha_2} \in L\Gamma_{\alpha_1}$, ибо, соединив x_{α_2} и x_β упорядоченным континуумом, убедимся, что он проходит через y_{α_2}. Упорядоченный континуум L_1, соединяющий x_β с y_{α_1}, не пересекается с V_{α_1}, ибо $x_\beta, y_{\alpha_1} \in L\Gamma_{\alpha_1}$, и, кроме того, $L_1 \cap V_{\alpha_2} = \Lambda$, ибо континуум, соединяющий x_β с x_{α_1}, принадлежит целиком $L\Gamma_{\alpha_2}$ и содержит в себе L_1. Итак, $L_1 \cap (V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}) = \Lambda$. Аналогично $L_2 \cap (V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}) = \Lambda$, где L_2 — упорядоченный континуум, соединяющий точки x_β и y_{α_2}. Обозначим через L связное замкнутое множество $L_1 \cup L_2$. Видно, что связные замкнутые множества L и $[V]$ пересекаются по двум точкам y_{α_1} и y_{α_2}, что противоречит тому, что в древовидном периферически бикомпактном пространстве пересечение связных замкнутых множеств пусто или связно (см. лемму 2 из ([2])). Значит, $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} = \Lambda$, и за множество C берем $X \setminus \bigcup V_\alpha$. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{A_\alpha\}$ — дискретное семейство замкнутых подмножеств древовидного периферически бикомпактного пространства X. По трансфинитной индукции расширяем каждое A_α до некоторого замкнутого локально связного $\bar{A}_\alpha$ следующим образом. Множество $\bar{A}_1 = LA_1$ в множестве $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \neq 1} A_\alpha$. Если построены все $\bar{A}_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$, то $\bar{A}_\beta$ определяем так: $\bar{A}_\beta$ — это объединение всех тех упорядоченных континуумов, соединяющих пары точек из A_β, которые не пересекаются с замкнутым множеством $\bigcup\limits_{\alpha \leqslant \beta} \bar{A}_\alpha \cup \bigcup\limits_{\alpha \neq \beta} A_\alpha$. Чтобы выполнялось вложение $A_\alpha \subset \bar{A}_\alpha$, к $\bar{A}_\alpha$ относим по определению все точки самого A_α.

В силу лемм 1 и 4, каждое $\bar{A}_\alpha$ — локально связное замкнутое множество в X. Рассыпем $\bar{A}_\alpha$ на компоненты — получим дискретную систему замкнутых множеств: $\bar{A}_\alpha = \bigcup\limits_\gamma \bar{A}_{\alpha\gamma}$. Система $\{\bar{A}_{\alpha\gamma}\}$ по всем допустимым α и γ — дискретная система связных замкнутых множеств.

Подпространство $\bar{X} = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha,\gamma} \bar{A}_{\alpha\gamma}$ рассыпается на открытые компоненты: $\bar{X} = \bigcup\limits_\beta \bar{X}_\beta$. При этом $[\bar{X}_\beta]$ при любом β содержит не более чем по одной точке из каждого $\bar{A}_{\alpha\gamma}$; это означает, что $\Gamma_\beta = [\bar{X}_\beta] \setminus \bar{X}_\beta$ — дискретное множество. Применив лемму 5 к подпространству $[\bar{X}_\beta]$ и его дискретному подмножеству Γ_β, получим замкнутое множество C_β; $C_\beta \subset \bar{X}_\beta$. Можно показать, что множество $C = \bigcup_{\beta} C_{\beta}$ является замкнутым. Допустим противное: нашлась точка $x \in [C] \setminus C$. Возьмем произвольную ее окрестность Ox с конечной границей. Окрестность Ox пересекается с бесконечным числом множеств вида $\bar{X}_{\beta}$, но так как граница Ox конечна, а семейство $\{\bar{X}_{\beta}\}$ дизъюнктно, то это означает, что бесконечное число множеств вида $\bar{X}_{\beta}$ целиком принадлежат Ox. Итак, всякая окрестность точки x с конечной границей содержит бесконечное число множеств вида $\bar{X}_{\beta}$ и, следовательно, пересекается с бесконечным числом множеств вида $\bar{A}_{\alpha\gamma}$, что противоречит дискретности семейства $\{\bar{A}_{\alpha\gamma}\}$. Значит, C замкнуто. После этого нетрудно видеть, что $X \setminus C$ рассыпается на открытые компоненты, каждая из которых содержит не более чем по одному множеству вида $\bar{A}_{\alpha\gamma}$, откуда сразу следует, что дискретное семейство $\{A_{\alpha}\}$ помещено в систему попарно непересекающихся окрестностей. Следовательно, X коллективно нормально. Теорема доказана.

Пример. Существуют древовидные пространства, не являющиеся нормальными, что показывает следующий пример *. На полуплоскости введем новую топологию следующим образом. Если $x \in L$, где L — граничная прямая, то базисная Ox — это открытый круг, касающийся L в точке x вкупе с точкой x. Если же $x \notin L$, то ее базисная окрестность — это произвольный интервал, содержащий x и перпендикулярный L. Полученное таким образом пространство древовидно, вполне регулярно, но не нормально (ср. его с пространством Немыцкого!).

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Freudenthal, Ind. Math. Amst., 13, 184 (1951). [2] В. В. Произволов, ДАН, 189, № 4 (1969). [3] Г. Л. Гурин, Вестн. МГУ, № 1, 9 (1969). [4] Б. А. Ефимов, Тр. Моск. матем. общ, 14, 211 (1965).

* Пример отвечает на вопрос, поднимавшийся О. В. Локуциевским.