Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 2

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

П. И. ЮДИЦКАЯ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МАКСИМУМА ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 20 II 1970)

Пусть $\xi(t)$ — стационарный сепарабельный гауссовский действительный случайный процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^\infty \lambda^2 [\ln(1+\lambda)]^a f(\lambda)\, d\lambda < \infty$$

для некоторого $a > 1$.

Г. Крамер [1] показал, что

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\max_{0\leqslant t\leqslant T} \xi(t) - \sqrt{2\ln T}| < \ln\ln T / \sqrt{2\ln T}\} = 1.$$

М. Г. Шур [2] установил, что при тех же предположениях с вероятностью единица:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \xi(t) - \sqrt{2\ln T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

В настоящей заметке исследуется асимптотическое поведение максимума случайных полей. Методы доказательства отличаются от [1,2], так как в случае функций нескольких переменных нельзя использовать оценки, связанные с числом пересечений уровня.

Рассмотрим сепарабельное действительное гауссовское однородное изотропное случайное поле $\xi(\bar{x})$ в n-мерном эвклидовом пространстве R^n. Как известно,

$$M\xi(\bar{x}_1)\xi(\bar{x}_2) = R_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = R_2(r),$$

где $r_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)'$. Не ограничивая общности, будем считать, что $M\xi(\bar{x}) = 0$, $D\xi(\bar{x}) = 1$.

Пусть ν — мера Лебега, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ множеств, измеримых по Лебегу в R^n. Рассмотрим в R^n параллелепипед $D(X_1, \ldots, X_n) = (0 \leqslant x_1 \leqslant X_1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant X_n)$ и измеримую замкнутую односвязную область E_1, ограниченную поверхностью Φ_1, $\nu(E_1) = 1$, $\bar{0} \in E_1$.

Сделаем преобразование подобия поверхности Φ_1 с центром в начале координат и коэффициентом подобия $K > 1$, получим поверхность Φ_k, ограничивающую область E_k.

Теорема. *Предположим, что с вероятностью единица существуют непрерывные первые и вторые частные производные случайного поля* $\xi(\bar{x})$ *и* $P\{\det \|\partial^2\xi(\bar{x}) / \partial x_i \partial x_j\| = 0\} = 0$.

Пусть корреляционная функция поля удовлетворяет условиям:

$$\text{I. } \left| \frac{\partial^4 R_1(\bar{x})}{\partial x_1^{\varepsilon_1} \ldots \partial x_n^{\varepsilon_n}} - \frac{\partial^4 R_1(\bar{0})}{\partial x_1^{\varepsilon_1} \ldots \partial x_n^{\varepsilon_n}} \right| < N_1 \sum_{i=1}^n |x_i|^\delta,$$

$$\varepsilon_i = 0, 2, 4;\ N_1 = \text{const} > 0;\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 4;\ \delta > 0.$$

II. $|R_2(r)| < N_2 / r^n$, $N_2 = \text{const}$.

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *почти наверное найдутся такие случайные* $K^0(\varepsilon) < \infty$, $X_i^0(\varepsilon) < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, *что при* $K > K^0(\varepsilon)$

$$|\max_{\bar{x}\in E_k} \xi(\bar{x}) - \sqrt{2\ln \nu(E_k)}| < (2+\varepsilon)\ln\ln\nu(E_k) / \sqrt{2\ln\nu(E_k)},$$

а при $X_i > X_i^0(\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\Big| \max_{\bar{x} \in D(X_1, \ldots, X_n)} \xi(\bar{x}) - \Big(2 \ln \prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{1/2} \Big| < (n + 1 + \varepsilon) \ln \ln \prod_{i=1}^{n} X_i \Big/ \Big(2 \ln \prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{1/2}.$$

Из работы Ю. К. Беляева ([3]) следует, что в условиях теоремы существует μ_c — интенсивность среднего числа локальных максимумов случайного поля, превышающих уровень c.

Лемма 1. *Для произвольного* $c > 0$

$$\mu_c \leqslant f(n) e^{-c^2/2},$$

где $f(n)$ *конечна для всякого* n *и не зависит от* c.

Лемма 2. *Для всякого* $c > 0$, $k > 1$

$$P\{\max_{\bar{x} \in E_k} \xi(\bar{x}) > c\} \leqslant N_3 \nu(E_k) e^{-c^2/2}. \tag{1}$$

Кроме того, если $X_i > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, *то*

$$P\{\max_{\bar{x} \in D(X_1, \ldots, X_n)} \xi(\bar{x}) > c\} \leqslant N_3 \prod_{i=1}^{n} X_i e^{-c^2/2}. \tag{2}$$

Здесь N_3 — *постоянная, которая не зависит от* c, k, $X_1, \ldots, X_n$.

Лемма 3. *В условиях теоремы для всякого* $c > 0$

$$P\{\max_{\bar{x} \in G} \xi(\bar{x}) < c\} \leqslant N_4 c^2 (e^{c^2/2} + e^{c^2/3} \ln \nu(G))/\nu(G), \tag{3}$$

где G *совпадает с* $D(X_1, \ldots, X_n)$ *или с* E_k; N_4 *не зависит от* c, $X_1, \ldots, X_n$, k, *а* $X_i > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, $k > 1$.

Лемма 4. *Пусть сходятся следующие ряды:*

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=1}^{m} P\Big\{\max_{\bar{x} \in D(e^{m_1}, \ldots, e^{m_n})} \xi(\bar{x}) >$$

$$> \Big[2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \Big(\ln \sum_{i=1}^{n} m_i\Big)(n + 1 + \varepsilon)\Big] \Big/ \Big(2 \sum_{i=1}^{n} m_i\Big)^{1/2}\Big\},$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=1}^{\infty} P\Big\{\max_{\bar{x} \in D(e^{m_1}, \ldots, e^{m_n})} \xi(\bar{x}) <$$

$$< \Big[2 \sum_{i=1}^{n} m_i - \Big(\ln \sum_{i=1}^{n} m_i\Big)(n + 1 + \varepsilon)\Big] \Big/ \Big(2 \sum_{i=1}^{n} m_i\Big)^{1/2}\Big\},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\{\max_{\bar{x} \in E_{e^m}} \xi(\bar{x}) > (2mn)^{1/2} + (2 + \varepsilon) \ln(mn)/(2mn)^{1/2}\},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\{\max_{\bar{x} \in E_{e^m}} \xi(\bar{x}) < \sqrt{2mn} - (2 + \varepsilon) \ln(mn)/(2mn)^{1/2}\}.$$

Тогда имеет место утверждение теоремы.

В сходимости рядов можно убедиться, подставляя в (1), (2), (3) вместо c соответствующие значения.

В заключение выражаю искреннюю благодарность М. И. Ядренко за постановку задачи и внимание к работе.

Научно-исследовательский институт
строительного производства
Госстрой УССР

Поступило
17 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramer, Bull. Am. Math. Soc., 68, 512 (1962). [2] М. Г. Шур, Теория вероятностей и ее применения, 10, 2 (1965). [3] Ю. К. Беляев, ДАН, 176, № 3, 495 (1967).