Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 5

УДК 513.811/881 *МАТЕМАТИКА*

Г. Ш. РУБИНШТЕЙН

ОБ ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТКРЫТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 26 I 1970)

В статье устанавливается связь между относительно открытыми выпуклыми множествами в вещественных векторных пространствах* и абстрактными осевыми структурами, к рассмотрению которых приводит формализация элементарно-геометрического понятия оси.

Условимся говорить, что на множестве Q определена осевая структура, если в нем выделена некоторая совокупность R непустых упорядоченных подмножеств (осей) и при этом выполнены следующие условия (аксиомы):

1. Каждая ось $\overleftrightarrow{\Pi} \in R$ является совершенно (линейно) упорядоченным непрерывным множеством (все сечения его дедекиндовы) без наименьшего и наибольшего элементов.

2. Каковы бы ни были два (различных) элемента — точки $x, y \in Q$ в R найдется одна и только одна ось $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Pi}(x, y)$ такая, что $x \in \Pi$, $y \in \Pi$, $x \prec y$, где $\prec$ обозначает отношение предшествования, порождаемое отношением порядка $\preccurlyeq$ на оси $\overrightarrow{\Pi}$.

3. Оси $\overrightarrow{\Pi}(x, y)$ и $\overrightarrow{\Pi}(y, x)$, отвечающие любым двум (различным) точкам $x, y \in Q$, состоят из одних и тех же элементов.

4. Если три точки $x, y, z \in Q$ не лежат на одной оси, то при любых $u \in \overrightarrow{\Pi}(x, y)$, $v \in \overrightarrow{\Pi}(y, z)$ таких, что на соответствующих осях $y \prec u$, $y \prec v \prec z$, на оси $\Pi(u, v)$ найдется точка w, принадлежащая также оси $\overrightarrow{\Pi}(x, z)$ и удовлетворяющая на ней соотношению $x \preccurlyeq w \preccurlyeq z$.

Множества с осевыми структурами (с несколько иной, но эквивалентной системой аксиом) под различными наименованиями (геометрия без измерения, непрерывные модели промежуточности, непрерывная геометрия порядка) рассматривались еще Пашем (1882), Пеано (1889), Гильбертом (1899), Вебленом (1904) и др. (см. ([1]), стр. 253—275). Из недавних публикаций отметим ([2–4]).

В каждом множестве Q с осевой структурой R очевидным образом определяются понятия прямой, отрезка, аффинного многообразия, выпуклого множества, аффинной и выпуклой оболочки произвольного множества $A \subset Q$, а также понятия относительно открытого и (*)-открытого множества. Заметим, что осевая структура R, определенная в Q, очевидным образом индуцирует осевую структуру R' в каждом относительно открытом выпуклом множестве $Q' \subset Q$. При этом множество Q с осевой структурой R называется расширением множества Q' с осевой структурой R'.

---

* Множество M в вещественном векторном пространстве E называется открытым относительно своей аффинной оболочки L или, короче, относительно открытым, если для любой прямой $\Pi \subset L$ множество $\Pi \cap L$ является открытым на Π. Если кроме того $L = E$ или $L = \varnothing$, то множество M называется (*)-*открытым*.

Далее, про точки множества $A \subset Q$ говорят, что они аффинно независимые, если ни одна из этих точек не содержится в аффинной оболочке (аф.об.) остальных. Если точки множества A аффинно независимые и $x_0 \overline{\in}$ аф.об. A, то точки множества $A' = A \cup \{x_0\}$ оказываются также аффинно независимыми. Благодаря этому среди аффинно независимых подмножеств A произвольного множества $M \subset Q$ имеются максимальные. Каждое из таких подмножеств называется аффинной базой множества M. Можно показать, что все аффинные базы множества M имеют одну и ту же мощность. Одинаковую мощность имеют также множества, дополняющие аффинные базы множества M до аффинных баз всего Q. Это позволяет ввести понятия аффинной размерности (dim) и аффинной коразмерности (codim) для произвольного множества $M \subset Q$. Чтобы не входить в противоречие с привычным, в качестве $\dim M$ принимается мощность аффинной базы множества M, из которой исключен один элемент, а в качестве $\operatorname{codim} M$ — мощность дополнения аффинной базы множества M до аффинной базы всего Q. Ниже особо выделяются двумерные аффинные многообразия, называемые плоскостями, и аффинные многообразия с коразмерностью единица, которые называются гиперплоскостями. Заметим, что если H — гиперплоскость в Q, то $Q \setminus H$ однозначно представимо в виде объединения двух непересекающихся (*)-открытых выпуклых множеств Q_1 и Q_2, называемых открытыми полупространствами, отвечающими гиперплоскости H. При этом отрезок, соединяющий любые две точки $x_1 \in Q_1$ и $x_2 \in Q_2$, имеет общую точку с H.

В каждом вещественном векторном пространстве естественным образом определяется осевая структура. В качестве осей, очевидно, достаточно принять упорядоченные по возрастанию параметра t невырожденные прямые $\{z = x + t(y - x) : t \in (-\infty, +\infty)\}$. В связи с этим в ([5]) абстрактные множества с фиксированными осевыми структурами называются обобщенными векторными пространствами (о.в.п.).

Из сказанного выше ясно, что естественная осевая структура в вещественном векторном пространстве E индуцирует осевую структуру в каждом относительно открытом выпуклом множестве $M \subset E$. Таким образом, относительно открытые выпуклые множества вещественного векторного пространства с естественными осевыми структурами представляют одну из возможных реализаций о.в.п. Мы покажем, что указанная реализация является в известном смысле исчерпывающей.

Прежде всего, выделим класс о.в.п., изоморфных осевым структурам вещественных векторных пространств. Для этого в о.в.п. введем понятие параллельности осей. Условимся говорить, что ось $\vec{\Pi}_0$ параллельна оси $\vec{\Pi}$, и писать $\vec{\Pi}_0 \parallel \vec{\Pi}$, если $\Pi_0 \cap \vec{\Pi} = \phi$ и при любых

$$x \in \vec{\Pi}_0, \quad y \in \vec{\Pi}_0, \quad x \prec y, \quad z \in \vec{\Pi}, \quad u \in \vec{\Pi}(y, z), \quad y \prec u \prec z$$

оси $\vec{\Pi}(x, u)$ и $\vec{\Pi}$ имеют общую точку v, которая на этих осях удовлетворяет соотношениям $u \prec v, z \prec v$.

Можно показать, что, каковы бы ни были о.в.п. (Q, R), ось $\vec{\Pi} \in R$ и точка $x \in \vec{\Pi}$, в R найдется одна и только одна ось $\vec{\Pi}_0$, удовлетворяющая условиям $x \in \vec{\Pi}_0$, $\vec{\Pi}_0 \parallel \vec{\Pi}$. Рассматриваемое о.в.п. мы назовем эвклидовым (э.о.в.п.), если в нем помимо условий 1—4 выполнена еще следующая аксиома:

5. Если $\vec{\Pi}(x, y) \parallel \vec{\Pi}(z, u)$, то $\vec{\Pi}(y, x) \parallel \vec{\Pi}(u, z)$.

Вещественные векторные пространства с естественными осевыми структурами, очевидно, являются э.о.в.п. С помощью построений, аналогичных рассмотренным в другой связи в ([5]) (стр. 112—122), нетрудно проверить, что справедливо также следующее обратное утверждение.

Если э.о.в.п. (Q, R) является более чем двумерным (содержит четыре аффинно независимые точки), то, фиксируя произвольно нулевую точку

$0 \in Q$, можно (и притом однозначно) ввести в Q структуру вещественного векторного пространства так, чтобы естественная осевая структура этого векторного пространства совпадала с исходной осевой структурой в Q.

Это означает, что если рассматриваемое абстрактное о.в.п. (Q, R) более чем двумерное, то вопрос о его реализации в виде относительно открытого выпуклого множества вещественного векторного пространства сводится к проверке возможности расширения о.в.п. (Q, R) до э.о.в.п.

Что касается двумерных о.в.п., то из возможности их расширения до э.о.в.п. еще не следует существования искомой реализации. Кроме того, существуют двумерные о.в.п., в которых отношение параллельности осей не является симметричным, и такие о.в.п. заведомо нельзя расширить до э.о.в.п. Соответствующий пример рассмотрен в ([1]) (стр. 1124).

Заметим теперь, что в более чем двумерных о.в.п., допускающих расширение до э.о.в.п., как нетрудно проверить, справедливо следующее предложение из ([2]) (стр. 85—89).

Л е м м а о к р ы ш а х. *Если прямые Π_1 и Π_2 не совпадают и лежат в одной плоскости P, то при любых точках $x_1, x_2 \in P$ прямые*

$$\Pi_{x_1} = \bigcap_{i=1,2} \text{аф. об. } (\Pi_i \cup \{x_1\}), \quad \Pi_{x_2} = \bigcap_{i=1,2} \text{аф. об. } (\Pi_i \cup \{x_2\})$$

также лежат в одной плоскости.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Т е о р е м а. *Если в более чем двумерном о.в.п. (Q, R) справедлива лемма о крышах, то оно допускает расширение до э.о.в.п.*

Наметим основные вехи доказательства. Зафиксируем в Q некоторую гиперплоскость H, отвечающие ей открытые полупространства Q_1 и Q_2 и три аффинно независимые точки $x_1, x_2, x_3 \in H$. Через S_i $(i = 1, 2, 3)$ обозначим пучок прямых, пересекающих гиперплоскость H в точке x_i (проходящих через эту точку и не имеющих других общих точек с H), и рассмотрим множество $\tilde{Q}$ троек $\tilde{x} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ прямых $\Pi_1 \in S_1$, $\Pi_2 \in S_2$, $\Pi_3 \in S_3$ таких, что каждые две из них лежат в одной плоскости. Ясно, что каждый элемент $\tilde{x} \in \tilde{Q}$ однозначно определяется заданием любых двух прямых соответствующей тройки. Кроме того, если какие-то две прямые тройки $(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \in \tilde{Q}$ имеют общую точку, то и третья прямая проходит через эту точку. Сопоставляя точкам $x \in Q \setminus H$ элементы $f(x) \in \tilde{Q}$, определяемые прямыми $\Pi(x_1, x)$, $\Pi(x_2, x)$, $\Pi(x_3, x)$, мы получаем взаимно однозначное (инъективное) отображение множества $Q \setminus H = Q_1 \cup Q_2$ в $\tilde{Q}$.

Опираясь на лемму о крышах, в $\tilde{Q}$ удается определить совокупность осей $\tilde{R}$ так, что выполнены условия 1—5. Получаемое при этом э.о.в.п. $(\tilde{Q}, \tilde{R})$ оказывается следующим образом связанным с исходным о.в.п. (Q, R). Если прямая $\Pi \subset Q$ не имеет общих точек с гиперплоскостью H, то ее образ $f(\Pi) \subset \tilde{Q}$ совпадает с пересечением множества $f(Q \setminus H)$ с некоторой прямой $\tilde{\Pi} \subset \tilde{Q}$ и является открытым отрезком, открытым лучом (без вершины) или всей прямой $\tilde{\Pi}$. Если же прямая $\Pi \subset Q$ пересекает гиперплоскость H в некоторой точке x_0, то множество $f(\Pi \setminus \{x_0\})$ совпадает с пересечением множества $f(Q \setminus H)$ с некоторой прямой $\tilde{\Pi} \subset \tilde{Q}$ и представляет собой объединение двух открытых лучей прямой $\tilde{\Pi}$ без общих точек. При этом, если прямые Π_1 и Π_2 пересекают гиперплоскость H в точках x_0' и x_0'', то множества $f(\Pi_1 \setminus \{x_0'\})$ и $f(\Pi_2 \setminus \{x_0''\})$ тогда и только тогда лежат на параллельных прямых в $\tilde{Q}$, когда $x_0' = x_0''$. Далее, если $x, y, u, v \in Q \setminus H$, причем точки u, v лежат на оси $\vec{\Pi}(x, y)$ и на ней $u \prec v$, то образы этих точек на оси $\vec{\tilde{\Pi}}(f(x), f(y))$ удовлетворяют соотношению $f(u) \prec f(v)$, если отрезок uv не пересекается с H, и соотношению $f(v) \prec f(u)$ — в противном случае. Наконец, аффинные оболочки множеств $f(Q_1)$ и $f(Q_2)$ совпадают со всем $\tilde{Q}$.

Из приведенных фактов следует, в частности, что не имеющие общих точек множества $f(Q_1)$ и $f(Q_2)$ в э.о.в.п. $(\tilde{Q}, \tilde{R})$ являются выпуклыми и $(*)$-открытыми. Следовательно, найдется гиперплоскость $\tilde{H} \subset \tilde{Q}$ такая, что отвечающие ей открытые полупространства $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$ содержат множества $f(Q_1)$ и $f(Q_2)$ соответственно. Зафиксируем в $\tilde{H}$ некоторую точку и через $\tilde{H}'$ обозначим пучок прямых, пересекающих гиперплоскость $\tilde{H}$ в этой точке. Для каждой точки $x \in H$ на основании сказанного выше в $\tilde{H}'$ найдется одна и только одна прямая, параллельная f-образам открытых лучей с вершиной в точке x.

Рассмотрим множество $\tilde{Q}' = (\tilde{Q} \setminus \tilde{H}) \cup \tilde{H}'$ и инъективное отображение f множества $Q \setminus H$ в $\tilde{Q} \setminus \tilde{H}$ доопределим до инъективного отображения множества Q в $\tilde{Q}$. Для этого каждой точке $x \in H$ сопоставим определяемый ею единственный элемент $f(x) \in \tilde{H}'$. С помощью осевой структуры $\tilde{R}$ в $\tilde{Q}$ определим совокупность осей $\tilde{R}'$ в $\tilde{Q}'$. Для этого включим в $\tilde{R}'$ без изменения оси $\vec{\Pi} \in \tilde{R}$, не имеющие общих точек с гиперплоскостью $\tilde{H}$. Каждую ось $\vec{\Pi} \in \tilde{R}$, пересекающую гиперплоскость $\tilde{H}$ в некоторой точке $\tilde{x}_0$, заменим осью $\vec{\Pi}' = (\vec{\Pi} \setminus \{\tilde{x}_0\}) \cup \{\tilde{x}_0'\}$, где в качестве $\tilde{x}_0'$ выбирается прямая пучка $\tilde{H}'$, параллельная оси $\vec{\Pi}'$. Отношение порядка на новой оси $\vec{\Pi}$ устанавливается так, что если на оси $\vec{\Pi}$

$$\tilde{y}_1 < \tilde{y}_2 < \tilde{x}_0 < \tilde{z}_1 < \tilde{z}_2,$$

то на оси $\vec{\Pi}'$ справедливо соотношение $\tilde{z}_1 < \tilde{z}_2 < \tilde{x}_0' < \tilde{y}_1 < \tilde{y}_2$. Наконец, вместо осей $\vec{\Pi} \in \tilde{R}$, расположенных в $\tilde{H}$, в $\tilde{R}'$ включаются оси $\vec{\Pi}'$, представляющие собой естественным образом упорядоченные двумерные подпучки пучка $\tilde{H}'$.

Нетрудно проверить, что множество $\tilde{Q}'$ с введенной указанным образом совокупностью осей $\tilde{R}'$ удовлетворяет условиям 1—5. При этом множество $f(Q) \subset \tilde{Q}'$ является выпуклым и относительно открытым (более того, $(*)$-открытым), а индуцируемая в нем осевая структура $\tilde{R}''$ превращает его в о.в.п. $(f(Q), \tilde{R}'')$, изоморфное исходному о.в.п. (Q, R). Это означает, что если точки $x \in Q$ отождествить с их образами $f(x) \in \tilde{Q}'$, то построенное э.о.в.п. $(\tilde{Q}', \tilde{R}')$ можно принять в качестве искомого расширения о.в.п. (Q, R), и теорема доказана.

Для завершения исследования поставленного вопроса о соотношении между абстрактными о.в.п., с одной стороны, и относительно открытыми выпуклыми множествами в вещественных векторных пространствах,— с другой, остается выяснить, справедлива ли лемма о крышах в любом более чем двумерном о.в.п. Для более чем трехмерных о.в.п. справедливость указанной леммы проверяется с помощью простейших соотношений между размерностями некоторых аффинных многообразий. Для трехмерных о.в.п. эта лемма рассматривается в ([2]) (стр. 85—89). Однако в ее доказательстве имеются некоторые пробелы, которые нам восполнить не удалось. Поэтому, проявляя необходимую осторожность, будем считать, что для трехмерного случая вопрос пока еще остается открытым.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
19 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. С. М. Кокстер, Введение в геометрию, «Наука», 1966. [2] Ю. Г. Лумисте, Основания геометрии, 1, Тарту, 1964. [3] Ю. Г. Лумисте, Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 13, 3, 200 (1964). [4] Г. Ш. Рубинштейн, Сибирск. матем. журн., 5, 5, 1098 (1964). [5] А. В. Погорелов, Основания геометрии, «Наука», 1968.