Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 2

УДК 535.51

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. Г. КУЗЬМИНА

ПРОБЛЕМА МИЛНА ДЛЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С РЭЛЕЕВСКИМ ЗАКОНОМ РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 8 I 1970)

Рассматривается задача о переносе поляризованного излучения в полубесконечной плоской атмосфере $z > 0$, рассеивающей по закону Рэлея при условиях постоянства полного потока и отсутствия падающего на границу $z = 0$ внешнего излучения. Известно, что задача допускает азимутально однородное решение, отвечающее полю линейно поляризованного излучения, причем плоскость поляризации совпадает с меридиональной плоскостью, определяемой единичным вектором $\mathbf{n}$ внутренней нормали к поверхности $z = 0$ и единичным вектором $\boldsymbol{\omega}$ направления распространения излучения в каждой точке. Такое поле излучения полностью описывается двумерным вектором

$$\boldsymbol{\Psi}(z, \mu) = \begin{bmatrix} \Psi_1(z, \mu) \\ \Psi_2(z, \mu) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $\Psi_1(z, \mu)$ и $\Psi_2(z, \mu)$ — компоненты интенсивности излучения с взаимно ортогональным состоянием поляризации; z — оптическая толщина, измеряемая в длинах свободного пробега рэлеевского рассеяния; $\mu = (\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega})$. Задача представляет интерес для атмосфер звезд ранних классов, в которых единственным механизмом взаимодействия излучения с веществом является томсоновское рассеяние на свободных электронах.

Функция $\boldsymbol{\Psi}(z, \mu)$ удовлетворяет уравнению переноса

$$\mu \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(z, \mu)}{\partial z} + \boldsymbol{\Psi}(z, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \hat{K}(\mu, \mu') \boldsymbol{\Psi}(z, \mu')\, d\mu', \tag{2}$$

где

$$\hat{K}(\mu, \mu') = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 2(1-\mu^2)(1-\mu'^2) + \mu^2\mu'^2 & \mu^2 \\ \mu'^2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{\Psi}(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0; \tag{4}$$

$$\lim_{z\to\infty} e^{-z} \boldsymbol{\Psi}(z, \mu) = 0. \tag{5}$$

Введем моменты функции $\boldsymbol{\Psi}(z, \mu)$

$$\boldsymbol{\Psi}^k(z) = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{\Psi}(z, \mu) P_k(\mu)\, d\mu, \tag{6}$$

где $P_k(\mu)$ — полином Лежандра порядка k, и положим, кроме того,

$$\mathbf{F}(z) \equiv \boldsymbol{\Psi}^1(z), \quad \mathbf{K}(z) \equiv {}^1/_3\{2\boldsymbol{\Psi}^2(z) + \boldsymbol{\Psi}^0(z)\}. \tag{7}$$

Представив $\hat{K}(\mu, \mu')$ в виде

$$\hat{K}(\mu, \mu') = \hat{A}_1 + \hat{A}_3 P_2(\mu) + \{\hat{A}_2 + \hat{A}_4 P_2(\mu)\} P_2(\mu'), \tag{8}$$

где $\hat{A}_k$, $k = 1, \ldots, 4$,— числовые матрицы, нетрудно получить для моментов $\boldsymbol{\Psi}^k(z)$, $k = 0, 1, 2$, систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dF/dz = (\hat{A}_1 - \hat{I})\,\Psi^0(z) + \hat{A}_2\Psi^2(z), \tag{9}$$

$$dK/dz = -F(z), \tag{10}$$

которая вытекает из уравнения (2). (Символом $\hat{I}$ обозначена единичная матрица второго порядка.) Из (9) и (10) следуют законы сохранения

$$F = F_1(z) + F_2(z) = \text{const}, \tag{11}$$

$$K(z) = K_1(z) + K_2(z) = -Fz + K(0). \tag{12}$$

Функция $\Psi(z, \mu)$ однозначно определена своими первыми тремя моментами. Обратив дифференциальный оператор в левой части (2) и пользуясь уравнениями (9) и (10), можно получить для нее выражение

$$\Psi(z, \mu) = F(z, \mu)\begin{bmatrix} 3\mu^2 - 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}\hat{\Lambda}_2(\mu)\int\limits_z^{0,\infty} \Psi^0(t)\, e^{-(z-t)/\mu}\, dt, \tag{13}$$

где

$$F(z, \mu) = \frac{9}{2(4 - 3\mu^2)}\{\mu(F_1(z) - \varepsilon F_1(0)\, e^{-z/\mu}) + K_1(z) - \varepsilon K_1(0)\, e^{-z/\mu}\},$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \mu > 0, \\ 0, & \mu < 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\hat{\Lambda}_2(\mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{9}{2}\dfrac{\mu^2}{4 - 3\mu^2} \\ 0 & \dfrac{3}{4 - 3\mu^2} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

(Верхний предел интеграла в (13) равен 0 при $\mu > 0$ и ∞ при $\mu < 0$.)

Введем теперь образ Лапласа функции $\Psi^k(z)$

$$\Phi^k(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sz}\Psi^k(z)\, dz. \tag{16}$$

Привлекая уравнения (9) и (10), нетрудно найти связь между $\Phi^2(s)$ и $\Phi^0(s)$:

$$\Phi^2(s) = \hat{C}_1(s)\,[F(0) - sK(0)] + \hat{C}_2(s)\,\Phi^0(s), \tag{17}$$

где $\hat{C}_k(s)$, $k = 1, 2,$— известные матрицы. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (2), умножая его затем на $(1 + s\mu)^{-1}$ и интегрируя по μ на отрезке $[-1, 1]$, после подстановки вместо $\Phi^2(s)$ выражения (17), придем к интегральному уравнению для $\Phi^0(s)$

$$\{\hat{I} - \hat{\Lambda}(s)\}\,\Phi^0(s) = T(s), \tag{18}$$

где

$$\hat{\Lambda}(s) = \begin{bmatrix} L_0(s) - L_2(s) & \dfrac{1}{4s^2 - 3}\{s^2 L_0(s) + (2s^2 - 3)\, L_2(s)\} \\ & \dfrac{3(s^2 - 1)}{4s^2 - 3} L_0(s) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) + \dfrac{3}{4s^2 - 3}\{L_0(s) - 2L_2(s)\}\{F_1(0) - sK_1(0)\} \\ G_2(s) - \dfrac{3}{4s^2 - 3} L_0(s)\{F_1(0) - sK_1(0)\} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$L_0(s) = \frac{1}{2s}\ln\frac{1 + s}{1 - s}, \quad L_2(s) = \frac{3 - s^2}{2s^2}L_0(s) - \frac{3}{2s^2}, \tag{21}$$

$$G(s) = \int\limits_{-1}^{0} \frac{\mu\Psi(0, \mu)\, d\mu}{1 + s\mu}. \tag{22}$$

Вследствие треугольности матрицы $\hat{\Lambda}(s)$ векторное уравнение (18) можно свести к двум независимым скалярным уравнениям. Действительно, пусть

$$\Phi_1(s) = (s^2 - 1)\Phi_1^0(s) + F_1(0) - sK_1(0) + \\ + \frac{3}{4s^2 - 3}\{(s^2 - 1)\Phi_2^0(s) - F_1(0) + sK_1(0)\}, \tag{23}$$

$$\Phi_2(s) = \frac{3}{4s^2 - 3}\{(s^2 - 1)\Phi_2^0(s) - F_1(0) + sK_1(0)\}. \tag{24}$$

Тогда уравнение (18) распадается на два независимых уравнения относительно функций $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$:

$$\Omega_1(s)\Phi_1(s) = H_1(s), \tag{25}$$

$$\Omega_2(s)\Phi_2(s) = H_2(s), \tag{26}$$

где

$$\Omega_1(s) = \frac{1}{2s^2}\{(2s^2 - 3) - 3(s^2 - 1)L_0(s)\}, \tag{27}$$

$$\Omega_2(s) = \frac{1}{4}\{4s^2 - 3 - 3(s^2 - 1)L_0(s)\}, \tag{28}$$

$$H_1(s) = (s^2 - 1)G_1(s) + F_1(0) - sK_1(0), \tag{29}$$

$$H_2(s) = (s^2 - 1)G_2(s) - F_1(0) + sK_1(0). \tag{30}$$

Уравнения (25) и (26) дают возможность изучить аналитическую структуру $\mathbf{\Phi}^0(s)$. Оказывается, что в полосе $|\mathrm{Re}\, s| < 1$ единственной особенностью $\mathbf{\Phi}^0(s)$ является точка $s = 0$ (полюс второго порядка), а в точках $s = \pm 1$ функция $(s^2 - 1)\mathbf{\Phi}^0(s)$ обращается в нуль.

Аналитические свойства функций $\Omega_k(s)$, $\Phi_k(s)$ и $H_k(s)$ позволяют применить к уравнениям (25) и (26) метод Винера — Хопфа. Решения этих уравнений получаются в виде

$$\Phi_1(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\tau_{2-}(1)}{\tau_{1-}(1)}F(s+1)\tau_{1-}(s), \tag{31}$$

$$\Phi_2(s) = -\sqrt{2}Fs^{-2}(s+1)\tau_{2-}(s), \tag{32}$$

$$\tau_1(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2}\Omega_1(s), \quad \tau_2(s) = s^{-2}\Omega_2(s), \tag{33}$$

$$\tau_{k-}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty}\frac{\ln\tau_k(u)\,du}{u - s}, \quad 0 < \beta < 1, \quad k = 1, 2, \tag{34}$$

$$\tau_{1-}(1) = \exp\left\{\pi^{-1}\int\limits_0^{\pi/2}\ln[2\sin^4 x/(3 - \sin^2 x - 3x\operatorname{ctg} x)]\,dx\right\}, \tag{35}$$

$$\tau_{2-}(1) = \exp\left\{\pi^{-1}\int\limits_0^{\pi/2}\ln[4\sin^2 x/(3 + \sin^2 x - 3x\operatorname{ctg} x)]\,dx\right\}. \tag{36}$$

Численные значения коэффициентов в (31) и (32) находятся с помощью априорной информации об аналитических свойствах $\mathbf{\Phi}^0(s)$.

Определяя теперь $\Phi_1{}^0(s)$ и $\Phi_2{}^0(s)$ из соотношений (23) и (24) и производя обращение преобразования Лапласа, получаем точные выражения для компонент момента $\mathbf{\Psi}^0(z)$

$$\Psi_1^0(z) = -\frac{3}{2}F(z + z_0) + \\ + 6\sqrt{2}\frac{\tau_{2-}(1)}{\tau_{1-}(1)}F\int\limits_0^1\frac{e^{-z/\mu}d\mu}{(1+\mu)\tau_{1-}(\mu^{-1})[2^4\Omega_1^2(\mu^{-1}) + 3^2\pi^2\mu^2(1-\mu^2)^2]} - \\ - 18\sqrt{2}F\int\limits_0^1\frac{(1-\mu^2)\mu^2 e^{-z/\mu}d\mu}{\tau_{2-}(\mu^{-1})[2^6\tau_2^2(\mu^{-1}) + 3^2\pi^2\mu^2(1-\mu^2)^2]}, \tag{37}$$

$$\Psi_2^0(z) = -\frac{3}{2}F(z+z_0) + 6\sqrt{2}F\int_0^1 \frac{(1-\mu)(4-3\mu^2)\,e^{-z/\mu}d\mu}{\tau_{2-}(\mu^{-1})\,[2^6\tau_2^2(\mu^{-1}) + 3^2\pi^2\mu^2(1-\mu^2)^2]}, \qquad (38)$$

где экстраполированная длина z_0 определяется формулой

$$z_0 = 1 + \tau'_{2-}(0)/\tau_{2-}(0) = 1 + \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{3\,\mathrm{ctg}^2 x\,(1 - x\,\mathrm{ctg}\,x) + x\,\mathrm{ctg}\,x}{1 + \sin^2 x - 3x\,\mathrm{ctg}\,x}\,dx. \qquad (39)$$

Угловое распределение выходящего излучения получается из (13) при $z=0,\ \mu<0$

$$\boldsymbol{\Psi}(0,\mu) = F(0,\mu)\begin{bmatrix}3\mu^2-2\\1\end{bmatrix} - \frac{\mu^2-1}{2\mu}\hat{\Lambda}_2(\mu)\,\Phi^0(-\mu^{-1}). \qquad (40)$$

Выполняя вычисления в (40), найдем

$$\Psi_1(0,\mu') = -\frac{3\sqrt{2}}{8}F\frac{\tau_{2-}(1)}{\tau_{1-}(1)}(1+\mu')\,\tau_{1-}\left(\frac{1}{\mu'}\right), \qquad (41)$$

$$\Psi_2(0,\mu') = -\frac{3\sqrt{2}}{8}F\tau_{2-}(1)(1+\mu')\,\tau_{2-}\left(\frac{1}{\mu'}\right), \quad \mu' = -\mu > 0, \qquad (42)$$

где

$$\tau_{1-}(\mu^{-1}) = \exp\left\{\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\ln[2\sin^4 x/(3 - \sin^2 x - 3x\,\mathrm{ctg}\,x)]}{1-(1-\mu^2)\sin^2 x}\,dx\right\}, \qquad (43)$$

$$\tau_{2-}(-\mu^{-1}) = \exp\left\{\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\ln[4\sin^2 x/(3 + \sin^2 x - 3x\,\mathrm{ctg}\,x)]}{1-(1-\mu^2)\sin^2 x}\,dx\right\}. \qquad (44)$$

Задача (2), (4), (5) впервые изучалась С. Чандрасекаром ([1–3]). Им найдено приближенное решение методом дискретных ординат и предельным переходом получена точная формула для углового распределения выходящего излучения. В последнее время рядом авторов проведено исследование уравнения (2) методом Кейза ([4, 5]) и методом В. В. Соболева *. В частности, построена система регулярных и сингулярных собственных функций характеристического уравнения теории переноса и решение проблемы Милна получено в виде разложения по функциям этой системы. Угловое распределение выходящего излучения выражается через H-функции Чандрасекара.

Автор благодарит М. В. Масленникова за обсуждение работы и полезные замечания.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Chandrasekhar, Ap. J., 103, 351 (1946). [2] S. Chandrasekhar, Ap. J., 105, 164 (1947). [3] С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953 [4] C. E. Siewert, S. K. Fraley, Ann. Phys., 43, 338 (1967). [5] R. L. Bowden, N. R. Richardson, J. Math. Phys., 9, 1753 (1968).

* Х. Домке, частное сообщение.