Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 518.5 *МАТЕМАТИКА*

В. Л. АРЛАЗАРОВ, Е. А. ДИНИЦ, М. А. КРОНРОД, И. А. ФАРАДЖЕВ

ОБ ЭКОНОМНОМ ПОСТРОЕНИИ ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 III 1970)

1. Для ориентированного графа (H, γ), где H — множество вершин, а γ — отображение H в себя [1], известны алгоритмы построения транзитивного замыкания Γ с оценкой числа действий для графа общего вида $O(n^3)$ [2-4], где $n = |H|$. В [4] задача построения транзитивного замыкания графа общего вида сводится к последовательности трех задач: построения графа Герца [5] данного графа, транзитивного замыкания графа Герца (ациклического) и построения транзитивного замыкания данного графа по транзитивному замыканию его графа Герца, причем показано, что первая и третья из них могут быть решены за $O(n^2)$ действий.

В данной заметке строится алгоритм транзитивного замыкания ациклического графа за $O(n^3 / \ln n)$ действий.

2. Для ациклического графа (H, γ) рассмотрим разбиение H на ранги K_i:

$$K_0 = \{h \in H: \gamma^{-1}h = \phi\}, \quad K_i = \{h \in H \setminus S_{i-1}: \gamma^{-1}h \subset S_{i-1}\},$$

где $S_i = \bigcup_{j \leqslant i} K_j$.

В [4] приводится алгоритм такого разбиения за $O(n^2)$ действий.

Обозначим γ_i и Γ_i отображения S_{i-1} в K_i порожденные γ и Γ соответственно, а $G_i = \bigcup \Gamma_j$ — отображение S_{i-1} в S_i. Тогда, очевидно:

$$G_0 = \phi, \quad \Gamma_i = \gamma_i G_{i-1} \cup \gamma_i. \tag{1}$$

Тем самым построение транзитивного замыкания сведено к треугольному процессу получения произведений отображений.

3. Лемма (М. Кронрод). *Пусть A, B, C — множества, $|A| = p$, $|B| = q$, $|C| = r$, и α, β — многозначные отображения α: $A \to B$, β: $B \to C$.*

Тогда отображение $\beta\alpha$: $A \to C$ можно построить за $O((p + q)qr / \ln q)$ действий.

Доказательство. Разобьем B на $[q / \ln q] + 1$ непересекающихся подмножеств B_i, так чтобы $|B_i| \leqslant \ln q$. Обозначим α_i: $A \to B_i$, β_i: $B_i \to C$, порожденные α и β соответственно. Тогда, очевидно:

$$\beta\alpha = \bigcup_i \beta_i \alpha_i. \tag{2}$$

Рассмотрим множество $M_i = \{m_{is}\}$ всех подмножеств B_i и изоморфное ему множество $L_i = \{l_{is}\}$, где $l_{is} = \bigcup_{b \in m_{is}} \beta_i b$. Занумеровав элементы B_i: b_{i0}, b_{i1}, и т. д., упорядочим элементы M_i и L_i следующим образом: $s = \sum_k 2^{j_k} \leftrightarrow m_{is} = \bigcup_k b_{ij_k}$. Очевидно, что $l_{i0} = \phi$, $l_{i2^j} = \beta_i b_{ij}$, а любое другое l_{is} может быть получено объединением двух других с меньшими номерами. Например: $l_{is} = l_{ik} \cup l_{i,\, s-k}$; $s \neq 2^j$, где $k = \max\{2^j: 2^j < s\}$. Поскольку $|L_i| \leqslant q$, а $|l_{is}| \leqslant r$, то L_i можно построить за $O(qr)$, а все L_i — за $O(q^2 r / \ln q)$ действий.

Далее, из полноты M_i следует, что для $a \in A$ $\alpha_i a \in M_i$ и, следовательно, $\beta_i \alpha_i a \in L_i$. Таким образом, после того как все L_i построены, на получение $\beta\alpha$ по (2) требуется $O(pqr / \ln q)$ действий.

4. Теорема. *Для ациклического ориентированного графа* (H, γ) *с* $|H| = n$ *транзитивное замыкание* Γ *можно построить за* $O(n^3 / \ln n)$ *действий.*

Доказательство. Применим алгоритм леммы к построению $\gamma_i G_{i-1}$ в (1). Так как γ_i действует из S_{i-1} с $|S_{i-1}| < n$ в K_i с $|K_i| = n_i$, а G_{i-1} действует из S_{i-2} с $|S_{i-2}| < n$ в S_{i-1}, построение $\gamma_i G_{i-1}$ может быть выполнено за $O(n^2 n_i / \ln n)$ действий. Суммируя по рангам, получим искомую оценку.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Институт проблем управления
Москва

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Центральный научно-исследовательский
институт патентной информации
Москва

Поступило
20 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Берж, Теория конечных графов и ее приложения, ИЛ, 1962. [2] В. В. Мартынюк, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 2, № 6 (1963). [3] Э. Б. Ершов, Экономика и математические методы, 2, в. 2 (1966). [4] И. А. Фараджев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 4 (1970). [5] А. А. Зыков, Теория конечных графов, Новосибирск, 1969.