Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 2

УДК 517.949.2

МАТЕМАТИКА

М. Л. РАСУЛОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНТУРНОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ МНОГОМЕРНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 XII 1969)

В настоящей заметке дается применение метода контурного интеграла (по схеме глав VIII—IX книги ([1])) автора к решению смешанных задач для параболических систем второго порядка, содержащих в граничном условии производную по времени в области D трех измерений с границей Γ.

Рассматривается система

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) v = A(x)\Delta v + \sum_{i=1}^{3} A_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + A_0(x)v + f(x, t) \tag{1}$$

при граничном условии

$$\lim_{x\to z}\{[\alpha_0(z) + \alpha_1(z) M(t, \partial/\partial t)]\, dv(x, t)/dn_z + $$
$$+ [\beta_0(z) + \alpha_1(z)\beta_1(z) M(t, \partial/\partial t)]\, v(x, t)\} = \psi(z, t), \quad z\in\Gamma, \tag{2}$$

и начальном условии

$$v(x, 0) = \Phi(x), \tag{3}$$

где $M(t, \partial/\partial t) = b_0(t)\partial/\partial t + b_1(t)$; $b_0(t)$, $b_1(t)$ — функции, определенные на интервале $[0, \infty)$; $A(x)$, $A_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ — квадратные матрицы порядка m, определенные в трехмерной области $D+\Gamma$.

Предполагается выполнение условий:

1°. В области $D+\Gamma$ корни $\nu_i(x)$ $(i, \ldots, m)$ характеристического уравнения

$$\det(A(x) + \nu E) = 0$$

имеют постоянную кратность и строго отрицательные части. Кроме того, функции $b_0(t)$, $b_1(t)$ непрерывны на интервале $[0, \infty)$ и существуют постоянные числа $\varepsilon > 0$, $C > 0$, $\sigma \geqslant 0$, $C_1 > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$0 < \varepsilon \leqslant b_0^{-1}(t) \leqslant Ce^{\sigma t}, \quad |b_1(t)| \leqslant C_1.$$

2°. Матрицы $\alpha_k(z)$, $\beta_k(z)$ $(k = 0, 1)$ непрерывны на Γ и при достаточно больших значениях комплексного параметра λ матрица

$$[\lambda_0(z) + \lambda^2\alpha_1(z)]^{-1}[\beta_0(z) + \lambda^2\alpha_1(z)\beta_1(z)]$$

ограничена при $z\in\Gamma$ числом, не зависящим от λ; Γ — поверхность Ляпунова; при $y\in\Gamma$ вектор-функция $\psi(y, t)$ является оригиналом в смысле заметки ([2]).

3°. Вектор-функции $\Phi(x)$, $\partial^k f(x, t)/\partial t^k$ $(k = 0, 1, 2)$ имеют непрерывные производные по всем x_i $(i = 1, 2, 3)$ в области $D+\Gamma$ при $t\geqslant 0$ и обращаются в нуль в некоторой граничной полосе области D.

В заметках ([3, 4]) доказано существование положительного δ такого, что в области R_δ значений λ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\lambda| \geqslant R, \quad |\arg\lambda| \leqslant \pi/4 + \delta, \tag{R_δ}$$

существует аналитическое по λ решение соответствующей спектральной задачи

$$A(x)\Delta u + \sum_{i=1}^{3} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (A_0(x) - \lambda^2)u = \Phi(x), \tag{4}$$

$$\lim_{x\to z} B(z, d/dn_z, \lambda^2)\, u(x, \lambda) = \tilde{\psi}(z, \lambda), \tag{5}$$

где $\tilde{\psi}(z, \lambda)$ — аналитическое продолжение вектор-функции

$$\int_0^\infty \exp[-\lambda^2 t_1(t) + t_2(t)]\, t_1'(t)\, \psi(z, t)\, dt$$

на всю область R_δ;

$$t_1(t) = \int_0^t b_0^{-1}(\tau)\, d\tau, \quad t_2(t) = \int_0^t b_0^{-1}(\tau)\, b_1(\tau)\, d\tau.$$

Пусть R — достаточно большое положительное число. Обозначим через S бесконечный разомкнутый контур, расположенный в области R_δ, достаточно отдаленные части которой (расположенные вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса) совпадают с продолжениями лучей $\arg\lambda = \pm(\pi/4 + \delta)$.

С помощью оценок, полученных в заметках [3, 4], для решения спектральной задачи по схеме главы IX книги [1] доказываются следующие утверждения:

Теорема 1. *При условиях 1^0—3^0 существует решение $v^{(1)}(x, t, \psi)$ задачи* (1), (3), *в случае $f(x, t) \equiv 0$, $\Phi(x) \equiv 0$, представимое в виде контурного интеграла*

$$v^{(1)}(x, t, \psi) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_S \exp[\lambda^2 t_1(t) - t_2(t)]\, \lambda u^{(1)}(x, \lambda, \tilde{\psi})\, d\lambda, \tag{6}$$

где $u^{(1)}(x, \lambda, \tilde{\psi})$ — решение спектральной задачи (4), (5) *для $\Phi(x) \equiv 0$ в D*

Теорема 2. *При условиях теоремы 1, если вектор-функции $\Phi(k)$, $\partial^k f(x, t)/\partial t^k$ $(k = 0, 1, 2)$ при $t \in [0, \infty)$ один раз непрерывно дифференцируемы в области $D + \Gamma$ и обращаются в нуль в некоторой граничной полосе области D, то задача* (1) — (3) *для $\psi(z, t) \equiv 0$ на Γ имеет решение $v^{(2)}(x, t, \Phi, f)$, представимое формулой*

$$v^{(2)}(x, t, \Phi, f) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_S \lambda\, d\lambda \int_D G(x, \xi, \lambda)\, z(\xi, t, \lambda)\, dD_\xi, \tag{7}$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ — матрица Грина спектральной задачи (4), (5); *$z(x, t, \lambda)$ — решение задачи Коши*

$$M(t, \partial/\partial t) z - \lambda^2 z = f(x, t), \quad z(0) = \Phi(x).$$

Легко убедиться, что

$$z(\xi, t, \lambda) = \Phi(\xi) \exp[\lambda^2 t_1(t) - t_2(t)] +$$
$$+ \int_0^t b_0^{-1}(\tau) f(\xi, \tau) \exp\{\lambda^2[t_1(t) - t_1(\tau)] - [t_2(t) - t_2(\tau)]\}\, d\tau.$$

Интегралы (6) и (7) можно вычислить по схеме заметки [5], и тогда для $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ получим представление в виде ряда, члены которого выражаются через данные задачи.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
12 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Расулов, Метод контурного интеграла, «Наука», 1964. [2] М. Л. Расулов, И. С. Зейналов, ДАН, 189, № 5 (1969). [3] М. Л. Расулов, ДАН, 192, № 6 (1970). [4] М. Л. Расулов, ДАН, 192, № 5 (1970). [5] М. Л. Расулов, ДАН, 128, № 3 (1959).