Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

А. К. ГУЩИН, В. П. МИХАЙЛОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 2 III 1970)

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши для параболического уравнения

$$p(x)u_t(x, t) = \Delta u(x, t), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $p(x) \geqslant a > 0$.

Предположим, что функции $p(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} p(x) &\in B^\alpha_{[n/2]-1}(R_n) \quad \text{для } n \geqslant 4, \\ p(x) &\in B^\alpha_0(R_n) \qquad \text{для } n < 4, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\varphi(x) \in B^0_0(R_n). \tag{4}$$

Под классом $B_k^\alpha(R_n)$, k — целое число, подразумевается множество всех функций ограниченных и удовлетворяющих условию Гёльдера порядка $\alpha > 0$ в R_n вместе со всеми непрерывными производными до порядка k.

Целью заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Если функции $p(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям* (3), (4) *и*

$$\frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|x-y| \leqslant R} |p(y) - b|\, dy \to 0 \quad \text{при } R \to \infty \tag{5}$$

равномерно по $x \in R_n$ для некоторой постоянной $b \left(\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\right)$, *то необходимым достаточным условием существования предела*

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = A \tag{6}$$

при каком-либо $x \in R_n$ является существование предела

$$\frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|x-y| \leqslant R} \varphi(y)\, dy \to A \quad \text{при } R \to \infty. \tag{7}$$

Для того чтобы условие (6) *было выполнено равномерно на любом компакте $D \subset R_n$ (или равномерно в R_n), необходимо и достаточно, чтобы равномерно на любом компакте $D \subset R_n$ (соответственно равномерно в R_n) выполнялось условие* (7).

Заметим, что из результатов заметки [1] следует, что в рассматриваемом случае ($\varphi(x) \in B_0^0(R_n)$) A необходимо является постоянной.

Легко видеть, что условие (5) выполняется, в частности, если

$$\lim_{|y| \to \infty} (p(y) - b) = 0$$

или если

$$p(y) - b \in L_r(R_n) \tag{5'}$$

при каком-либо $r \geqslant 1$.

Не умаляя общности, можно считать, что в (5) $b = 1$. Обозначим через $v(x, t)$ решение уравнения теплопроводности с начальной функцией $p(x)\varphi(x)$

$$v(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R_n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) p(y)\varphi(y)\,dy.$$

Лемма 1. *Пусть $p(x) \in B_0^0(R_n)$ и выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t (u(x, t) - v(x, t))\,dt = 0 \tag{8}$$

равномерно по $x \in R_n$.

Пусть $\tilde{u}(x, \lambda)$ и $\tilde{v}(x, \lambda)$ — преобразования Лапласа функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$. Так как $u(x, t)$ и $v(x, t)$ ограничены при $t \geqslant 0$, $x \in R_n$, то $\tilde{u}(x, \lambda)$ и $\tilde{v}(x, \lambda)$ аналитичны по λ и ограничены по x для $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Функция $\tilde{u}(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\Delta\tilde{u}(x, \lambda) + \lambda\tilde{u}(x, \lambda) = p(x)\varphi(x) - \lambda q(x)\tilde{u}(x, \lambda), \tag{9}$$

где $p(x) = 1 + q(x)$. Уравнение (9) в классе $B_0^0(R_n)$ эквивалентно интегральному уравнению

$$\tilde{u}(x, \lambda) = -\mathscr{L}(\lambda)\tilde{u}(x, \lambda) + \tilde{v}(x, \lambda), \tag{10}$$

где оператор $\mathscr{L}(\lambda)$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}(\lambda)f(x, \lambda) = \frac{\lambda^{(n+2)/4}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R_n} \frac{K_{n/2-1}(\sqrt{\lambda}\,|x-y|)}{|x-y|^{n/2-1}} q(y) f(y, \lambda)\,dy,$$

$$\tilde{v}(x, \lambda) = \frac{\lambda^{(n-2)/4}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R_n} \frac{K_{n/2-1}(\sqrt{\lambda}\,|x-y|)}{|x-y|^{n/2-1}} p(y)\varphi(y)\,dy.$$

Функция $K_\nu(z)$ — цилиндрическая функция Макдональда.

Можно доказать, что оператор $\mathscr{L}(\lambda)$ является ограниченным оператором из $B_0^0(R_n)$ в $B_0^0(R_n)$ ($B_0^0(R)$ — банахово пространство с нормой $\|f\|_{B_0^0(R_n)} = \sup\limits_{x\in R_n} |f(x)|$) и

$$\|\mathscr{L}(\lambda)\|_{B_0^0(R_n)} = o(1) \text{ при } \lambda \to 0, \tag{11}$$

когда $|\arg\lambda| \leqslant \pi - \sigma$ при любом $\sigma > 0$. Из ограниченности функций $p(x)$ и $\varphi(x)$ вытекает, что

$$\|\tilde{v}(x, \lambda)\|_{B_0^0(R_0)} \leqslant C/|\lambda| \quad \text{для } |\arg\lambda| \leqslant \pi - \sigma. \tag{12}$$

Следовательно, из (10) и (12) имеем

$$\|\tilde{u}(x, \lambda)\|_{B_0^0(R_n)} \leqslant \|\mathscr{L}(\lambda)\|\,\|\tilde{u}(x, \lambda)\|_{B_0^0(R_n)} + \frac{C}{|\lambda|},$$

или, вследствие (11)

$$\|\tilde{u}(x, \lambda)\|_{B_0^0(R_n)} \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|} \quad \text{для } |\arg\lambda| \leqslant \pi - \sigma,\ |\lambda| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Из (10) и (11) тогда немедленно следует, что

$$\|\tilde{u}(x, \lambda) - \tilde{v}(x, \lambda)\|_{B_0^0(R_n)} = o(1/\lambda)$$

для $|\arg\lambda| \leqslant \pi - \sigma$, $|\lambda| < \varepsilon$.

Соотношение (8) после этого вытекает из тауберовой теоремы Винера [2].

Лемма 2. *Если функции $p(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям* (3), (4), (5), *то*

$$\|\partial u(x, t)/\partial t\|_{B_0^0(R_n)} \leqslant C/t \tag{13}$$

для $t \geqslant t_0 > 0$.

Функция $w(x, t) = \partial u(x, t) / \partial t$ является для $t > \delta$ $(0 < \delta < t_0)$ решением уравнения (1) с начальным условием

$$w(x, t)|_{t=\delta} = u_t(x, \delta) \equiv \psi(x). \tag{14}$$

Из условия (3) следует, что

$$\psi(x) \in B^0_{[n/2]}(R_n) \text{ для } n \geqslant 4; \quad \psi(x) \in B_2^0(R_n) \text{ для } n < 4. \tag{15}$$

Преобразование Лапласа $\widetilde{w}(x, \lambda)$ функции $w(x, t)$ удовлетворяет уравнениям (9) и (10), в которых функция $\varphi(x)$ заменена функцией $\psi(x)$.

Одновременно с задачей (1), (14) рассмотрим следующую задачу Коши для гиперболического уравнения:

$$p(x) z_{tt}(x, t) - \Delta z(x, t) = 0, \quad t > \delta,$$
$$z(x, \delta) = 0, \quad z_t(x, \delta) = \psi(x).$$

Из соотношений (15) и теорем вложения Соболева [3] следует, что

$$|z(x, t)| \leqslant Ct^m$$

при некотором $m > 0$ с постоянной C, не зависящей от x, t. Поэтому преобразование Лапласа $\tilde{z}(x, \lambda)$ функции $z(x, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$-\Delta\tilde{z}(x, \lambda) + \lambda^2\tilde{z}(x, \lambda) = p(x)\psi(x) - \lambda^2 q(x)\tilde{z}(x, \lambda), \tag{16}$$

является аналитической по λ и ограниченной по x функцией при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и $|\tilde{z}(x, \lambda)| \to 0$ для $|\lambda| \to \infty$ равномерно по $\arg\lambda \in [-(\pi - \sigma)/2, (\pi - \sigma)/2]$. Сравнивая уравнения (9) и (16) и пользуясь теоремой единственности в $B_0{}^0(R_n)$ решения уравнения (9), получим, что функция $\widetilde{w}(x, \lambda)$ аналитически продолжается в область $|\arg\lambda| < \pi$ равенством $\widetilde{w}(x, \lambda) = \tilde{z}(x, \sqrt{\lambda})$ и $\widetilde{w}(x, \lambda \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ равномерно по $\arg\lambda \in [-\pi + \sigma, \pi - \sigma]$. Так как $w(x, t) = u_t(x, t)$ для $t \geqslant \delta$, то из (10) имеем

$$\widetilde{w}(x, \lambda) = -\mathscr{L}(\lambda)\widetilde{w}(x, \lambda) - \mathscr{L}(\lambda)u(x, \delta) - u(x, \delta) + \lambda\tilde{v}(x, \lambda).$$

Из (11) и (12) следует, что

$$\|\widetilde{w}(x, \lambda)\|_{B_0^0(R_n)} \leqslant \text{const} \quad \text{для} \quad |\lambda| < \varepsilon, \ |\arg\lambda| \leqslant \pi - \sigma.$$

Заменяя в обратном преобразовании Лапласа для $\widetilde{w}(x, \lambda)$ контур интегрирования $\operatorname{Re}\lambda = \beta > 0$ контуром $|\arg\lambda| = 3\pi/4$ (считаем, что $\sigma < \pi/4$), без труда получим оценку (13).

Лемма 3. *Если для непрерывно дифференцируемой функции* $f(x, t)$ *выполняются условия*

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x, \tau)\, d\tau \to 0 \quad \textit{при} \ t \to \infty \tag{17}$$

равномерно по $x \in R_n$ *и*

$$|\partial f(x, t) / \partial t| \leqslant C / t \quad \textit{для} \ t \geqslant t_0 \tag{18}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, *то*

$$f(x, t) \to 0 \quad \text{\textit{при}}\ t \to \infty$$

равномерно по $x \in R_n$.

Эта лемма является следствием теоремы 33 книги ([4]) (стр. 388).

Возьмем в качестве функции $f(x, t)$ функцию $u(x, t) - v(x, t)$. В силу леммы 1 для этой функции имеет место соотношение (17), а в силу леммы 2 соотношение (18), поскольку неравенство $|\partial v(x, t) / \partial t| \leqslant C / t$ для $t > 0$ очевидно. Поэтому из леммы 3 следует, что

$$u(x, t) - v(x, t) \to 0 \quad \text{при}\ t \to \infty$$

равномерно по $x \in R_n$. После этого сформулированная теорема вытекает из известных результатов ([1, 2, 5, 6]), касающихся решения $v(x, t)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности, так как из условия (5) следует, что для выполнения соотношения (7) необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$\frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|x-y| \leqslant R} p(y)\,\varphi(y)\,dy \to A.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Михайлов, ДАН, 190, № 1 (1970). [2] Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., 1963. [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [4] Г. Харди, Д. Литтлвуд, Д. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948. [5] В. Д. Репников, С. Д. Эйдельман, ДАН, 167, № 2 (1966). [6] Ю. Н. Дрожжинов, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 2 (1969).